

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

期待ショートフォールによる  
ポートフォリオのリスク計測  
具体的な計算例による考察

やまい やすひろ よしば としなお  
山井康浩・吉羽要直

Discussion Paper No. 2001-J-16

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES  
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

**備考：** 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## 期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測 具体的な計算例による考察

やまい やすひろ よしば としなほ  
山井康浩・吉羽要直

### 要 旨

本稿では、期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、その推計値の安定性、それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、それに基づくポートフォリオの最適化の3点を検討した。この結果、期待ショートフォールは、各リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオの最適化が容易な点でバリュー・アット・リスクよりも優れていることが判明した。また、デフォルト相関の高い与信ポートフォリオなど損失額分布の裾が厚い場合は、期待ショートフォールの推計値はバリュー・アット・リスクの推計値に比べ不安定化するので、期待ショートフォールの推計には、バリュー・アット・リスクの推計に比べ多くのシミュレーション回数を確保する必要があるとの結論が得られた。

キーワード：期待ショートフォール、バリュー・アット・リスク、最適化

JEL classification: G20

\* 日本銀行金融研究所研究第1課(E-mail: yasuhiko.yamai@boj.or.jp, toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

本稿の作成にあたっては、山下 司氏(IQ ファイナンシャルシステムズ株式会社)から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、全て筆者個人に属する。

(目次)

1	はじめに .....	1
2	期待ショートフォールについて .....	2
3	期待ショートフォールの推計値の安定性 .....	2
4	期待ショートフォールの推計の具体例 .....	5
5	VaR および期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解 .....	8
6	期待ショートフォールを用いたポートフォリオの最適化 .....	13
7	おわりに .....	18
補論 A	リスク指標の推計値の標準偏差の解析的な評価方法 .....	32
補論 B	オプション・ポートフォリオのシミュレーション方法 .....	36
補論 C	与信ポートフォリオのシミュレーション方法 .....	37
補論 D	期待ショートフォールの別表現の証明 .....	39

## 1 はじめに

金融機関のリスク管理実務で、バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は最も標準的に使用されるリスク指標となっている。しかし、そのリスク指標としての妥当性に関しては、定義上・理論上の問題（ VaR が信頼区間外のリスクを捉えられない、 VaR が劣加法性<sup>1</sup>を満たさない）が指摘されている（詳細は山井・吉羽[2001]を参照）。こうした中、これらの問題を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念が提唱されている（Artzner, et al.[1997, 1999]）。期待ショートフォールは、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値と定義される。山井・吉羽[2001]では、期待ショートフォールは、上記 と の問題がないことから、概念上 VaR に比べて望ましいリスク指標であることを示した。しかし、期待ショートフォールを実務に応用するためには、推計されたリスク量の安定性など、いくつかクリアすべき問題があることも指摘した。

本稿では、シミュレーションを用いてリスク計測を行う場合の期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、その推計値の安定性、それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、それに基づくポートフォリオの最適化、の3点を検証する。

本稿の構成は以下のとおりである。2章では、山井・吉羽[2001]の結果を簡単に纏める形で期待ショートフォールの定義とその性質を説明する。3章では、損失額分布に特定の分布（安定分布）を仮定したうえで、期待ショートフォールおよび VaR の推計値の安定性を検討する。4章では、実務上一般的なポートフォリオの例として、米国株オプション・ポートフォリオと与信ポートフォリオを取り上げ、その VaR および期待ショートフォールを計算する。5章では、VaR および期待ショートフォールに対する各リスク・ファクターの寄与度の算出方法を示し、サンプル・ポートフォリオを用いてそれを具体的に例示する。6章では、期待ショートフォールの最適化方法を紹介し、サンプル・ポートフォリオを用いて具体的な計算を行う。7章では結論を簡単に整理する。

---

<sup>1</sup> リスク指標  $\rho$  が劣加法性を満たすとは、全体のポートフォリオのリスク量が個別ポートフォリオのリスク量の和を下回ることを指す。直観的には、「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減を織込むべきである」という要請を定式化したものであると考えられる。つまり、2つの個別ポジションの損失額を表わす確率変数をそれぞれ  $X$ 、 $Y$  とすると、任意の  $X$ 、 $Y$  について  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  が成立する時、リスク指標  $\rho$  は劣加法性を満たすという。

## 2 期待ショートフォールについて

Artzner, et al.[1997]は、リスク指標として、期待ショートフォール ( Expected Shortfall < Conditional VaR、 Mean Excess Loss、 Beyond VaR、 Tail VaR などとも呼ばれる > ) を提唱した。期待ショートフォールとは、損失額が VaR を超えることを条件とした損失額の条件付期待値である。具体的な定義を以下に示す。

### 期待ショートフォールの定義

ポートフォリオの損失額を表わす確率変数を  $X$ 、信頼水準  $100(1-\alpha)\%$  の VaR を  $VaR_\alpha(X)$  とすると<sup>2</sup>、これに対応する期待ショートフォール  $ES_\alpha(X)$  は以下のように定義される<sup>3</sup>。

$$ES_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]. \quad (1)$$

VaR が「信頼区間外の事象を除けば最大どの程度の損失を被るか」を計測する指標であるのに対し、期待ショートフォールは「損失が VaR を超える場合に平均的にどの程度の損失を被るか」を測定する。損失額が正規分布に従うことを仮定できない場合、VaR は、信頼区間外の損失を把握できない、劣加法性を満たさないことがある、といった問題点を持つものに対し、期待ショートフォールは、信頼区間外の損失も平均値の形で取り込んでいるほか、劣加法性を満たすことが示されている。つまり、期待ショートフォールは VaR よりも概念上優れたリスク指標であるといえる。しかし、実際に期待ショートフォールを実務で使う際には、期待ショートフォールの推計値が安定的か否かを検討する必要がある。

## 3 期待ショートフォールの推計値の安定性

### (1) 推計値の安定性

一般に、乱数を使ったシミュレーションでリスク量を推計する場合、乱数を使っているが故に、1回1回のシミュレーションによる推計値にばらつきが生じる。

<sup>2</sup> 本稿では、VaR を損失額分布の上側  $100\alpha\%$  分位点 ( quantile ) として定義する。

<sup>3</sup>  $E[x | B]$  は事象  $B$  が成立する条件の下での確率変数  $x$  の条件付期待値である。なお、本稿では  $X$  は損失額と定義しているため、損失は正值、利益は負値となる。

ここでは、推計値のばらつきが少ない状態を「推計値が安定している」状態と呼ぶことにする。一般に推計値が安定するためには、シミュレーションの数を多くすることが必要となる。

## (2) 安定分布を仮定した場合の推計値の振れ

本章では、損失額が安定分布<sup>4</sup>に従うと仮定し、VaR と期待ショートフォールの推計値の安定性を検討する。確率変数  $X$  が安定分布に従う場合、その i.i.d. な (独立かつ同一の分布に従う)  $n$  個の和  $S_n$  について、

$$S_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + \gamma_n, \quad (2)$$

となる<sup>5</sup>ような定数  $\alpha$ 、 $\gamma_n$  が存在する。 $\alpha$  を特性指数といい、 $\alpha$  が小さいほど分布の裾は厚くなる。安定分布の代表例には正規分布 ( $\alpha=2$  の場合)、コーシー分布 ( $\alpha=1$ )<sup>6</sup> がある (図表 1 参照)。同じ型の安定分布に従う確率変数の和が同じ型の安定分布に従うという点で、安定分布は正規分布の自然な一般化であると考えることが出来る。

まず、損失額分布が特定の特性指数 ( $\alpha=2.0, 1.9, \dots, 1.2, 1.1$ ) を持つ安定分布<sup>7</sup>に従うと仮定し、1,000 回のシミュレーション<sup>8</sup>をそれぞれ 10,000 セット行い、期

<sup>4</sup> 安定分布の詳細は、例えば Feller[1969]、Shiryayev[1999]などを参照。

<sup>5</sup>  $\stackrel{d}{=}$  は分布が等しいことを示す。

<sup>6</sup> コーシー分布 ( $\alpha=1$ ) では、分布の期待値は定義できない (無限大である)。このため、損失額がコーシー分布に従う場合は、裾部分の期待値である期待ショートフォールも定義できない。

<sup>7</sup> 安定分布に従う確率変数の特性関数  $\Phi(\theta)$  は、特性指数を  $\alpha$ 、歪度パラメータを  $\beta$ 、尺度パラメータを  $\sigma$ 、位置パラメータを  $\mu$  として、以下で表わすことができる ( $i = \sqrt{-1}$  である)。

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\operatorname{sgn}\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\}, & \text{if } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma |\theta| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\operatorname{sgn}\theta) \ln|\theta|) + i\mu\theta\}, & \text{if } \alpha = 1, \end{cases}$$

本稿のシミュレーションでは、歪度パラメータ  $\beta=0$ 、位置パラメータ  $\mu=0$ 、尺度パラメータ  $\sigma=1/\sqrt{2}$  とした。なお、尺度パラメータを  $\sigma=1/\sqrt{2}$  としたのは、 $\alpha=2$  のときの分布が標準正規分布となるようにするためである。

<sup>8</sup> 安定分布に従う乱数は、メルセンヌ・ツイスターによる一様乱数を Chambers, Mallows, and Stuck[1976]のアルゴリズムにより変換して生成した。

待ショートフォールおよび VaR の 10,000 個の推計値<sup>9</sup>について、平均、標準偏差および 95%信頼区間を求めた<sup>10</sup>。

結果は、図表 2~7 のとおりである。相対標準偏差（標準偏差/平均値）をみると、 $\alpha$  が 2 に近い場合（正規分布に近い場合）は VaR と期待ショートフォールとで大きな違いがないことがわかる。一方、 $\alpha$  が 1 に近づく（分布の裾が厚くなる）に従い、期待ショートフォールの相対標準偏差は、VaR のそれに比べてより大きくなり、推計値がより不安定となることがわかる。

このように分布の裾が厚くなるにつれて期待ショートフォールの推計値が不安定になる理由は、以下のように考えることができる。ポートフォリオで十分大きな損失が発生する確率を考える。損失額が裾の厚い分布に従う場合の確率と正規分布に従う場合の確率とを比べると、前者が後者を上回っている。期待ショートフォールは裾におけるすべての損失を勘案するので、シミュレーションによる期待ショートフォールの計測では、損失額分布の裾が厚いと、期待ショートフォールの推計値は、発生確率の極めて小さい大幅な損失がシミュレーション回数の中で発生するか否かでかなり変動し得る。この理由により、損失額が裾の厚い分布に従う場合は、期待ショートフォールと VaR を同じ回数のシミュレーションで求めると、前者の推計値の方が不安定になると考えられる。

次に、シミュレーション回数を増やすことにより、期待ショートフォールの推計値の安定性を高めることが可能かを確認する。ここでは、損失額分布が特定の特性指数（ $\alpha = 2.0, 1.5, 1.1$ ）を持つ安定分布に従うと仮定し、それぞれ、1,000 回、10,000 回、100,000 回、および 1,000,000 回のシミュレーションを 1,000 セット行い、得られた 1,000 個の推計値について、平均、標準偏差および 95%信頼区

---

<sup>9</sup> 信頼水準が  $100(1-\alpha)\%$  の VaR の推計値は、損失額分布の分位点である。ここでは、 $n$  回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を  $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(1)}$  として、VaR の推計値を  $X_{(n\alpha+1)}$  とした。一方、期待ショートフォールの推計値は次式とした。

$$ES_{\alpha} = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha + 1}$$

<sup>10</sup> 推計値の安定性の評価に関しては、VaR の推計値の標準偏差の解析的な算出方法があるほか、期待ショートフォールの推計値の標準偏差の近似による解析的算出方法がある（詳細は補論 A 参照）。損益額が正規分布または t-分布など比較的裾の薄い分布に従う場合は、推計値の標準偏差を解析的な方法で求めた値とシミュレーション結果を用いて求めた値とでは両者に大きな差はない。しかし、損失額がパレート分布などの裾の厚い分布に従う場合、両者は大きく異なるという問題がある。



間を求めた。標準偏差がシミュレーション回数の増加に応じて減少すれば、シミュレーション回数を増やすことにより推計値の安定性を高められる可能性が高い。

結果は、図表 8~10 のとおりである。それぞれの相対標準偏差（標準偏差/平均値）をみると、シミュレーション回数が増加するに従って相対標準偏差が減少しており、期待ショートフォールの推計値の安定性が増していることがわかる<sup>11</sup>。したがって、シミュレーション回数を増やすことにより、期待ショートフォールの推計値の安定性を高められると推測できる<sup>12</sup>。

#### 4 期待ショートフォールの推計の具体例

本章では、3章の考察を踏まえ、具体的なサンプル・ポートフォリオの期待ショートフォールの算出を行い、推計値の安定性をさらに考察する。ここではサンプル・ポートフォリオとして、米国株オプション・ポートフォリオと与信ポートフォリオを取り上げる。

##### (1) 米国株オプション・ポートフォリオ

サンプル・ポートフォリオは、米国株式 3 銘柄（ジェネラル・エレクトリック <GE>、マクドナルド、インテル）とこれらを原資産とする個別株オプションのショート・ポジションからなるポートフォリオである（図表 11 参照）。このポートフォリオの VaR および期待ショートフォールをシミュレーションにより計測する。各銘柄の株価収益率をリスク・ファクターとし、これらが多変量正規分布に従うと仮定する。リスク・ファクターの分散・共分散行列はヒストリカル・デ

---

<sup>11</sup> なお、図表 8より、損益額が特性指数  $\alpha=1.5$  の安定分布に従う場合、シミュレーション回数 1,000 回の VaR（信頼水準 95%）の推計値と同程度の安定性（相対標準偏差：0.08）を期待ショートフォール（信頼水準 95%）の推計値で確保するためには、数十万回から 1 百万回程度のシミュレーション回数（VaR の場合の数百倍から 1 千倍程度）が必要であることがわかる。

<sup>12</sup> この結果は、Acerbi and Tasche [2001]の「期待ショートフォールの推計値はシミュレーション回数を増やすと確率 1 で収束する（Proposition 3.1）」という定理と整合的である。

ータから推計する。保有期間は1日で、ボラティリティは保有期間中一定であるとする（シミュレーション方法の詳細は補論Bを参照）。図表12は当該ポートフォリオの損益額のヒストグラムである。コール・オプションのショート・ポジションがポートフォリオに含まれているため、損益額分布が大きく左に歪んでいる。

図表13～14は、当該ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールをシミュレーションにより推計した結果である。それぞれ、1,000回、10,000回、100,000回のシミュレーションを1,000セット行い、得られた1,000個の推計値について、平均、標準偏差および95%信頼区間を求めた。相対標準偏差をみると、VaRと期待ショートフォールはほぼ同水準であることがわかる。この結果は、3章の計算例で損失額が正規分布に従う場合（特性指数 $\alpha=2$ ）と類似している。これは、期待ショートフォールの推計が損失額分布の右裾のデータのみを利用するが、分布が全体で非正規性を示しつつも、オプションの行使価格が現在の株価に近いことから右裾の部分が正規分布に近い形状を持っているためである。

次に、図表11のサンプル・ポートフォリオのオプションをファー・アウト・オブ・ザ・マネー（以下、ファー・アウト）のオプション<sup>13</sup>としたサンプル・ポートフォリオ（図表15）のリスク計測を考察する。図表16は当該ポートフォリオの損益額のヒストグラムである。オプションがファー・アウトとなったため、損益額分布が図表12に比べ大きく左に歪んでいる。

図表17～18は、図表11のサンプル・ポートフォリオと同様の方法で当該ポートフォリオのVaRおよび期待ショートフォールをシミュレーションにより推計した結果である。これをみると、オプションをファー・アウトとしたことにより、期待ショートフォールの推計値がVaRの推計値に比べて相対的に不安定化することがわかる。これに対しては以下の解釈が可能である。ショート・ポジションをとっているオプションをファー・アウトにすると、このオプションから発生する損失の発生確率が低くなる。一方、ここではオプションのショート・ポジションの金額を一定としているため、オプション・プレミアムの減少をカバーするためのショート・ポジション枚数の大幅な増加から、ここから発生し得る損失額は大きくなる。この結果、オプションをファー・アウトにすることにより損失額分布の裾は厚くなり、3章で考察した結果（損失額分布の裾が厚くなると期待シヨ

---

<sup>13</sup> 株価が対数正規分布に従い、そのボラティリティがヒストリカル・ボラティリティに等しいと仮定すると、保有期間（1日）中に株価がこれらファー・アウトのオプションの行使価格に達する確率は0.01%以下である。

ートフォールの推計値が不安定化する)から期待ショートフォールの推計値は不安定化すると考えられる。したがって、ファー・アウトのオプションを含むポートフォリオの期待ショートフォールを推計する場合は、VaR を推計する場合に比べより多くのシミュレーション回数を確保する必要がある。

## (2) 与信ポートフォリオ

次の具体例として、仮想的な与信ポートフォリオ(図表 19)を考える。このポートフォリオは、デフォルト率が同一(1%または 0.1%)の 1,000 個の貸出で構成され、各貸出は平均 1 億円の指数分布に従うとする(貸出額の分布図は図表 20)。また、これら与信先間のデフォルト事象の相関は定数(0.00、0.03、0.05)であると仮定する。損失額分布の裾はこのデフォルト相関が高いほど厚くなる(家田・丸茂・吉羽[2000]を参照)。損失の定義は、債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生するとみなすデフォルト・モードとする。リスク量は、家田・丸茂・吉羽[2000]で採用されたシミュレーション手法を使って行う。

図表 21~24 は、サンプル・ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果である。それぞれ、1,000 回のシミュレーションを 1,000 セット行い、得られた 1,000 個の推計値について、平均、標準偏差および 95%信頼区間を求めた(シミュレーション方法の詳細は補論 C を参照)。

まず、図表 21~22(デフォルト率:1%)をみると、信頼水準 95%では、VaR および期待ショートフォールの相対標準偏差には、デフォルト相関の水準に依らず、大きな違いがない。一方、信頼水準 99%では、特にデフォルト相関が高いと、期待ショートフォールと VaR の相対標準偏差の差は信頼水準 95%の場合に比べて大きくなっている。一方、図表 23~24(デフォルト率:0.1%)をみると、いずれの信頼水準でも、デフォルト相関が 0.03、0.05 の場合、期待ショートフォールの相対標準偏差が VaR のそれを大きく上回っている。つまり、デフォルト率が低い場合とデフォルト相関が高い場合には、期待ショートフォールの推計値が不安定化することがわかる。

この結果に関して、以下の解釈が可能である。まず、デフォルト率が低いと、損失の発生確率も低くなる。期待ショートフォールの推計値は、シミュレーション回数の中で損失が発生するか否かに依存する。したがって、期待ショートフォールの推計では、損失の発生確率が低くなると、損失発生を安定的に再現できる

ほど十分なシミュレーション回数を確保する必要性が高まるため、同じ回数のシミュレーションでは、VaR に比べて期待ショートフォールの推計値が不安定化する。また、デフォルト相関が高いと、損失額分布の裾は厚くなる（家田・丸茂・吉羽[2000]を参照）ことから、3章で考察した結果（損失額分布の裾が厚くなると期待ショートフォールの推計値が不安定化する）により、推計値が不安定化することがわかる。したがって、ここでの例のような与信ポートフォリオの期待ショートフォールを推計する場合は、VaR を推計する場合に比べより多くのシミュレーション回数が必要となる。

## 5 VaR および期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解

ポートフォリオ全体のリスク量に、各リスク・ファクターがどの程度寄与しているかを計測する方法があれば、これを経営判断などに活用することが考えられる。例えば、各リスク・ファクターのリスク寄与度に応じて、リスク資本を配分することなどが考えられる<sup>14</sup>。

本章では、VaR および期待ショートフォールに対する各リスク・ファクターの寄与度の算出（以下では、リスク量の各リスク・ファクターへの「分解」と呼ぶ）方法を説明し、この計算例を4章（1）の米国株オプション・ポートフォリオを用いて示す。

### （1）VaR のリスク・ファクターへの分解

Hallerbach[1999]および Tasche[2000]は、シミュレーションでリスク量を算出する際に、VaR および期待ショートフォールをリスク・ファクターに分解する方法を提示した<sup>15</sup>。ここでは、Tasche[2000]の説明を用いてこの方法を紹介する。

まず、ポートフォリオの損失額  $X$  は、各リスク・ファクター  $i$  の変動に伴う損失額  $X_i$  の線形和、すなわち、

---

<sup>14</sup> リスク量の分解の考え方は、Garman[1997]で示されている。なお、後述する限界 VaR ( marginal VaR )、構成要素 VaR ( component VaR ) などの用語は Garman[1997]に依っている。

<sup>15</sup> Hallerbach[1999]および Tasche[2000]が提案した各リスク・ファクターのリスク量の寄与度の計算方法を解説したものに、室町[2001]がある。

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i, \quad (3)$$

$X$  : ポートフォリオ全体の損失額

$X_i$  : リスク・ファクター $i$ の変動に伴う損失額<sup>16</sup>

$\omega_i$  : リスク・ファクター $i$ に対するポートフォリオのセンシティビティ

であると仮定する。このとき、ポートフォリオの VaR はリスク・ファクター $i$ に対するポートフォリオのセンシティビティ  $\omega_i$  の 1 次同次関数であることから、

$$VaR_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i, \quad (4)$$

が成立する。つまり、ポートフォリオの VaR を  $\partial VaR / \partial \omega_i$  ( $\omega_i$  を 1 単位変化させた時の VaR の限界的变化額) と  $\omega_i$  の積の和に分解できることがわかる<sup>17</sup>。

Tasche[2000]は、一定の条件<sup>18</sup>で以下の関係が成立することを証明した。

限界 VaR (marginal VaR)

信頼水準  $100(1-\alpha)\%$  の VaR の  $\omega_i$  による偏微分 (限界 VaR、 $M - VaR_i$  とする) は、次の条件付期待値の形で表わせる (Remark 5.4, Tasche[2000])

$$M - VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E[X_i | X = VaR_\alpha(X)] \quad (5)$$

したがって、VaR の各リスク・ファクターへの分解は、(5)式の最右辺の推計が行えれば、その推計値を使って(6)式で行うことができる。

$$VaR_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i = \sum_{i=1}^n E[X_i | X = VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (6)$$

ここで、 $(\partial VaR_\alpha(X) / \partial \omega_i) \cdot \omega_i$  は、全体の VaR に対するリスク・ファクター $i$ の寄

<sup>16</sup> 例えば、ある銘柄の株式を 1,000 株 (購入時の価格: 1 株 1,500 円、現在の価格: 同 1,200 円) 持っているとする。この株式に起因する損失額は  $X_i = 300$  円、センシティビティは保有株数である  $\omega_i = 1,000$  株として考えることができる (逆に、この株式が 1 株 2,000 円に値上がりしている場合の損失額は、 $X_i = -500$  円と考えることができる)。

<sup>17</sup> ここで、リスク・ファクターと損失額との間に非線形関係が存在し、(3)式が成立しない場合、(4)式も一般には成立しない。ただし、オプションなど損失額が原資産価格と非線形な関係にある場合でも、原資産価格のほかオプション・プレミアムを新たにリスク・ファクターの 1 つとして加えることによりこの方法を応用することができる。

<sup>18</sup> 具体的には、各リスク・ファクターの同時確率分布の連続性や期待値の有限性などの条件。

与分と考えることができる<sup>19</sup>。このことから、構成要素 VaR ( component VaR ) を以下に定義する。

構成要素 VaR ( component VaR )

ポートフォリオの VaR に占めるリスク・ファクター  $i$  の寄与分( 構成要素 VaR、 $C-VaR_i$  とする ) を次のように定義する。

$$C-VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i = E[X_i | X = VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (7)$$

しかし、シミュレーションで得られる離散的な損失額分布から(5)式の最右辺を推計することは一般には困難である。これは、 $X = VaR_\alpha(X)$  という条件のみから条件付期待値を推計することが難しいためである。このため、Hallerbach[1999]のように、ポートフォリオの損失額が VaR 近傍をとる事象を集めてそのデータから条件付期待値を推計する、といった工夫が必要となる。

## (2) VaR のリスク・ファクターへの分解の数値例

ここでは、4章の米国株オプション・ポートフォリオ( 株式 3 銘柄および各銘柄を原資産とするコール・オプションのショート・ポジション ) の VaR を各証券へ分解する。ここでは、Hallerbach[1999]に従い、ポートフォリオの損失額が VaR 近傍をとる事象を集め、それらから条件付期待値を推計し、VaR を分解する。

まず、ポートフォリオの損失額が VaR 近傍となる事象を集める。 $N$  回のシミュレーションのうち  $j$  番目のシミュレーションを  $s^j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) と表記する。 $j$  番目のシミュレーションで得られたポートフォリオの損失額を  $X^j$  ( $1 \leq j \leq N$ )、証券  $i$  の損失額を  $X_i^j$  ( $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq N$ ) とする。さらに、VaR の近傍を  $[VaR_\alpha(X) - \varepsilon_d, VaR_\alpha(X) + \varepsilon_u]$  とする。VaR の近傍をとる事象の集合  $\Gamma$  は、

$$\Gamma = \left\{ s^j \mid VaR_\alpha(X) - \varepsilon_d \leq X^j \leq VaR_\alpha(X) + \varepsilon_u \right\} \quad (8)$$

である。この集合の要素の数を  $T$  とすると、各証券  $i$  の限界 VaR は、

<sup>19</sup> この考え方では、各リスク・ファクターの寄与分を、 $\omega_i$  の微小変化に対する VaR の微小変化の比率である限界 VaR により定義している、したがって、リスク寄与分が相対的に大きいリスク・ファクターでは、リスク寄与度を正確に反映していない可能性がある点に注意を要する。

$$M - VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E[X_i | X = VaR_\alpha(X)] \cong \frac{1}{T} \sum_j X_i^j. \quad (s^j \in \Gamma) \quad (9)$$

と近似できる。この推計方法により、10,000回のシミュレーションで求めたポートフォリオの信頼水準95%のVaRの分解を行った<sup>20</sup>（図表25）。

ここでは、この限界VaRの推計方法を評価するため、ポートフォリオ構成を微小変化させてVaRを再計算して得た限界VaR（「再計算限界VaR」と呼称）との比較を行った（図表26）。具体的には、ポートフォリオ構成を僅かに（初期ポートフォリオの保有額から前後に0.1%、0.5%、1%）変化させてVaRを再計算し、このポートフォリオの微小変化に対するVaRの変化率として再計算限界VaRを得た<sup>21</sup>。(9)式を用いて推計した限界VaRと再計算限界VaRとを比べると、インテル株式とインテル株オプションでは符号が逆になる場合があるなど結果が大きく異なっていることがわかる。したがって、(9)式を用いた推計方法では、必ずしもポジションの微小変化に対するVaRの変化率である限界VaRを正確に推計できるとは限らないことになる。

### (3) 期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解

同様に、Tasche[2000]は期待ショートフォールをリスク・ファクターに分解する方法を示した。以下、この方法を説明する。まず、(3)式が同様に成立しているとする。 $ES_\alpha(X)$ は $\omega$ の1次同次関数であるので、(10)式が成立する。

$$ES_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \cdot \omega_i \quad (10)$$

Tasche[2000]は、VaRの場合と同様に、一定の条件<sup>22</sup>で以下の関係が成立することを証明した。

<sup>20</sup> ここでは、(9)式の条件付期待値をVaRの近傍50個（前後25個）の値から推計した。

<sup>21</sup> 同じ乱数列を用いてシミュレートしているため、限界VaRと再計算限界VaRとの差は、(9)式の推計誤差である。

<sup>22</sup> 条件はVaRの場合と同じである。

限界期待ショートフォール ( marginal Expected Shortfall )  
 信頼水準  $100(1-\alpha)\%$  の期待ショートフォールの  $\omega_i$  による偏微分 ( 限界期待ショートフォール、  $M - ES_i$  とする ) は、以下の条件付期待値の形で表わされる ( Remark 5.4, Tasche[2000] )、

$$M - ES_i = \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] \quad (11)$$

したがって、期待ショートフォールの各リスク・ファクターへの分解は、以下の形で行うことができる<sup>23</sup>。

$$ES_\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \omega_i = \sum_{i=1}^n E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (12)$$

VaR と同様に、構成要素期待ショートフォールを以下の形で定義する。

構成要素期待ショートフォール ( component Expected Shortfall )  
 ポートフォリオの期待ショートフォールに占めるリスク・ファクター  $i$  の寄与分 ( 構成要素期待ショートフォール、  $C - ES_i$  とする ) を次のように定義する。

$$C - ES_i = \frac{\partial ES_\alpha(X)}{\partial \omega_i} \omega_i = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] \cdot \omega_i. \quad (13)$$

VaR の場合とは異なり、(11)式の最右辺の条件付期待値の計算は  $X \geq VaR_\alpha(X)$  という条件下であるので、その推計には複数のサンプルが用いられる。したがって、この条件付期待値の推計は容易に行うことができる。

#### (4) 期待ショートフォールのリスク・ファクターへの分解の数値例

ここでは、VaR と同様に、4章の米国株オプション・ポートフォリオの期待ショートフォールを分解する。ここでは、10,000回のシミュレーション結果により、期待ショートフォールの分解を行う。

$N$ 回のシミュレーションのうち  $j$ 番目のシミュレーションを  $s^j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) とし、 $j$ 番目のシミュレーションで得られたポートフォリオの損失額を  $X^j$

<sup>23</sup> この分解方法も、各リスク・ファクターの寄与分を、当該リスク・ファクターのセンシビリティの微小変化に対するリスク量の微小変化を基に定義している点に注意を要する。脚注19参照。



( $1 \leq j \leq N$ ) 各商品の損失額を  $X_i^j$  ( $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq N$ ) とする。ポートフォリオの損失額が VaR 以上となる事象の集合  $\Gamma$  は以下で表現することができる。

$$\Gamma = \{s^j | X^j \geq VaR_\alpha(X)\} \quad (14)$$

この集合の要素の数を  $T$  とすると、各証券  $i$  の限界期待ショートフォールは、

$$M - ES_i = E[X_i | X \geq VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{T} \sum_j X_i^j. \quad (s^j \in \Gamma) \quad (15)$$

と推計できる。

この推計方法を用いて、VaR の場合と同様に、10,000 回のシミュレーションで信頼水準 95% の期待ショートフォールの分解を行った (図表 27)。また、比較のために、VaR の場合と同様にポートフォリオを微小変化させて期待ショートフォールを再計算して得た限界期待ショートフォール (「再計算限界 ES」と呼称) との比較も行った (図表 28)<sup>24</sup>。(11)式を用いて推計した限界期待ショートフォールと再計算限界期待ショートフォールとを比較すると、これらの数値に殆ど違いがないことがわかる。したがって、(11)式を用いた推計方法により、ポジションの微小変化に対する期待ショートフォールの変化率である限界期待ショートフォールを正確に推計できるため、VaR の場合とは異なり、再計算を行わなくとも期待ショートフォールの分解を正確に行えることがわかる。

## 6 期待ショートフォールを用いたポートフォリオの最適化

損失額分布に正規分布を仮定した分散・共分散法による VaR が普及した理由の 1 つとして、この方法では VaR が標準偏差の定数倍となるため、平均・分散アプローチを用いてポートフォリオ最適化が行えることが挙げられる<sup>25</sup>。ここでは、損益額分布に正規性を仮定した場合の VaR に基づくポートフォリオ最適化の考え方を示し、正規性を仮定できない場合の VaR と期待ショートフォールに基づくポートフォリオ最適化の考え方を説明する。

<sup>24</sup> 図表 28 で、限界期待 ES と再計算限界期待 ES との差は、(11)式の推計誤差である。

<sup>25</sup> 厳密には、損失額が分散が有限の楕円分布族に属する分布 (正規分布も楕円分布族に属する) に従う場合も同様の議論が成立つが、ここでは簡単化のために正規分布として説明する。

(1) 分散・共分散法による VaR に基づくポートフォリオの最適化

損失額が正規分布に従う場合、VaR は標準偏差の定数倍となり、VaR に基づくポートフォリオの最適化と標準偏差に基づく最適化は同値となる。したがって、VaR に基づく最適化に平均・分散アプローチを用いることができる。このアプローチは、以下のように、ポートフォリオの期待収益率および各リスク・ファクターへのエクスポージャーの合計を所与として、収益率の分散を最小化する形で定式化される。

$$\min_{\{\omega\}} \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega, \quad (16)$$

$$\text{制約条件 } \omega' \mu = \mu_x$$

$$\omega' e = 1$$

$\mu$  : 各リスク・ファクターの期待収益率

$\mu_x$  : ポートフォリオ価値の収益率の一定値

$\Sigma$  : 各リスク・ファクターの分散・共分散行列

$e$  : 要素がすべて 1 である列ベクトル

$\omega$  : リスク・ファクターへのエクスポージャーを表わす列ベクトル

$\omega'$  :  $\omega$  の転置ベクトル

これは容易に解くことができ<sup>26</sup>、この解から所与の期待収益率  $\mu_x$  と最小化された標準偏差  $\sigma_x$  の組み合わせ（効率的フロンティア）が得られる。この効率的フロンティアにより、ポートフォリオの最適化が行える。ポートフォリオの VaR は標準偏差  $\sigma_x$  の定数倍であることから、縦軸に期待収益率  $\mu_x$ 、横軸に VaR をとった平面上でも同様の効率的フロンティアが得られ（図表 29 参照）、ポートフォリオの最適化を行うことができる。

<sup>26</sup> 具体的な解は以下のとおり。

$$\omega^* = \lambda \Sigma^{-1} e + \gamma \Sigma^{-1} \mu$$

$$\lambda = \frac{C - \mu_x B}{D}, \quad \gamma = \frac{\mu_x A - B}{D}, \quad A = e' \Sigma^{-1} e, \quad B = e' \Sigma^{-1} \mu, \quad C = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad D = AC - B^2$$

これより、効率的フロンティア  $\sigma_x^2 = \frac{A\mu_x^2 - 2B\mu_x + C}{D}$  が得られる。

## (2) シミュレーションで求めた VaR に基づくポートフォリオの最適化

一方、損失額分布に正規性を仮定できない場合は、VaR に基づくポートフォリオの最適化と標準偏差に基づく最適化の同値性は保証されない。したがって、(16) 式のような簡単な形で VaR の最適化を行うことは困難である。

Mausser and Rosen[1998]では、シミュレーションによりリスク量を計測する場合の VaR の最適化を試みている。ここでは、一般的に VaR がポジション量に対して凸関数ではないため、VaR に基づくポートフォリオ最適化が困難であることが示されている<sup>27</sup>。

## (3) シミュレーションで求めた期待ショートフォールに基づくポートフォリオの最適化

Rockafeller and Uryasev[2000]は、シミュレーションにより期待ショートフォールを計測する場合、これに基づいてポートフォリオを最適化する簡便なアルゴリズムを示した。以下では、Rockafeller and Uryasev[2000]による最適化の考え方を説明し、サンプル・ポートフォリオを用いて具体的な最適化を行う。

---

<sup>27</sup> 一般的に、目的関数および制約式が凸性を持たない場合の最適化問題では、複数の局所最適解が存在することが少なくなく、真の最適解を求めることは難しくなる(詳細は今野[1998]第15章の定理 15.3 および定理 15.4 を参照)。

Mausser and Rosen[1998]では、これをシミュレーションで求めた VaR に基づく最適化の場合に当てはめて説明しているが、その概要は以下のとおりである。

「 $n$  回のシミュレーションにより VaR を算出する場合は以下の手順に従う。まず、各要素が各リスク・ファクターの水準を表わすベクトルの  $n$  個のサンプル(以下、サンプル・ベクトル)を生成する。次に、これらの  $n$  個のサンプル・ベクトルから、ポートフォリオ全体の損失額を  $n$  個計算する。ポートフォリオの VaR (信頼水準  $100(1-\alpha)\%$ ) は、この  $n$  個の損失額を昇順に並べた  $n\alpha+1$  番目の金額である。

次にポートフォリオ構成(各リスク・ファクターのセンシティブリティ)を変化させる。ポートフォリオ構成の変化が十分に小さいと、VaR に対応するサンプル・ベクトルはポートフォリオの変化前と同一であることが普通であるため、その場合には VaR はセンシティブリティの変化に対して線形に変化する。しかし、ポートフォリオ構成の変化が十分に小さくないと、VaR に対応するサンプル・ベクトルが他のサンプル・ベクトルに入れ替わる可能性が大きくなり、入れ替わりがあった場合にはセンシティブリティの変化に対する VaR の(線形)変化率は入れ替わりの前と異なる水準となる。つまり、ポートフォリオ構成(センシティブリティ)の変化に対し、VaR は、区分的な直線からなる(piecewise linear)ギザギザの曲線に沿って変化する(Mausser and Rosen [1998], Figure 3 参照)。したがって、ポートフォリオ構成を変化させて VaR を最適化する場合は、複数の局所最適解が存在するため、最適化が難しくなる。」

これまでと同様、ポートフォリオの損失額  $X$  は、各リスク・ファクター  $i$  の変動に伴う損失額  $X_i$  の線形和であると仮定する。

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i, \quad (17)$$

$X$  : ポートフォリオ全体の損失額,  
 $X_i$  : リスク・ファクター  $i$  の変動に伴う損失額<sup>28</sup>,  
 $\omega_i$  : リスク・ファクター  $i$  に対するポートフォリオのセンシティブティ.

ここで各  $(X_1, \dots, X_n)$  が従う同時確率密度関数を  $p(X_1, \dots, X_n)$  とする。  $\Psi(\omega, \beta)$  を次のように定義する。

$$\Psi(\omega, \beta) = \int_{\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \leq \beta} p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n. \quad (18)$$

これは損失額  $\sum_{i=1}^n X_i \omega_i$  が閾値  $\beta$  を超えない確率を示している。

このとき、信頼水準  $100\alpha\%$  の VaR は次の  $\beta(\omega, \alpha)$  で定義できる。

$$\beta(\omega, \alpha) = \min\{\beta \in \mathbf{R} \mid \Psi(\omega, \beta) \geq \alpha\}. \quad (19)$$

一方、期待ショートフォールは損失額  $\sum_{i=1}^n X_i \omega_i$  が  $\beta(\omega, \alpha)$  以上であるとの条件下での損失額の期待値であり、

$$\Phi(\omega) = \int_{\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \geq \beta(\omega, \alpha)} \left( \sum_{i=1}^n X_i \omega_i \right) \cdot p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n, \quad (20)$$

と定義すると、期待ショートフォールは  $\Phi(\omega)/(1-\alpha)$  となる。

この(20)式を直接最適化することは、積分区間が  $\beta(\omega, \alpha)$  に依存しているため難しい。Rockafeller and Uryasev[2000]は、この最適化問題は次の関数  $F(\omega, \beta)$  の最小化問題と同値であることを示した（証明は補論 D 参照）。

$$F(\omega, \beta) = (1-\alpha)\beta + \int_{\omega} \left( \sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \beta \right)^+ p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n. \quad (21)$$

さらに、期待ショートフォールは最小化された  $F(\omega, \beta)$  を  $(1-\alpha)$  で除した値として

<sup>28</sup> 脚注16を参照。

与えられ、VaRはこのときの $\beta$ であることを示した。

確率密度関数 $p(X_1, \dots, X_n)$ に従って、 $X_1, \dots, X_n$ を $J$ 回( $X_{ij}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, J$ ) サンプルングし、(21)式の積分を以下のように近似する。

$$\int_{\omega} \left( \sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \beta \right)^+ p(X_1, \dots, X_n) dX_1 \cdots dX_n \approx J^{-1} \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i - \beta \right)^+. \quad (22)$$

このとき期待ショートフォールの最小化問題は次のように表せる。

$$\min_{\omega \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}^J, \beta \in \mathbf{R}} (1-\alpha)\beta + J^{-1} \sum_{j=1}^J z_j, \quad (23)$$

制約条件

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i - \beta, z_j \geq 0, j=1, \dots, J. \quad (24)$$

この近似された最小化問題は線形計画問題である。線形計画問題は、その効率的なアルゴリズムが知られている<sup>29</sup>。

ここで、期待損失(利益)額一定との制約条件は、(25)式で表わされる。

$$J^{-1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n X_{ij} \omega_i = -R. \quad (25)$$

また、ポートフォリオへの初期投資額を一定限度内に抑える制約式は(26)式で表わすことができる。

$$\sum_{i=1}^n P_i \omega_i = W_0. \quad (26)$$

$P_i$  : リスク・ファクター $i$ の初期値

$W_0$  : ポートフォリオへの初期投資額

これを解くことによって、損失額分布に正規性を仮定した VaR の場合と同様、効率的フロンティアを得ることができ、ポートフォリオの最適化を行える。

#### (4) 数値例

本節では、4章(1)の米国株式3銘柄とこれらを原資産とする個別株オプション

<sup>29</sup> 具体的な線形計画問題の解法は、今野[1987]を参照。

ンを投資対象とした場合の最適化の計算例を示す。

一定の期待収益額（0 から 10 までの 0.25 の倍数）に対する信頼水準 95%の期待ショートフォールの最小値を、各証券価格をシミュレーションで 1,000 回生成し、(24)~(26)式の制約条件下で(23)式を解くことで求めた。なお、ここでは解の発散を防ぐために、株式は空売りなし、オプションはショート・ポジションのみという制約を加えた。図表 30は、横軸に最小期待ショートフォールおよびそれに対応する VaR、縦軸に期待収益をとってプロットした「最小期待ショートフォール・フロンティア」である。ここからわかるように、フロンティアの形状は上に凸となっており、平均・分散アプローチの最小分散フロンティアと概ね似た形状をしている。また、図表 31は、このフロンティアに属する最適なポートフォリオの一例として、期待収益が 5 千米ドルのポートフォリオ構成を示した。

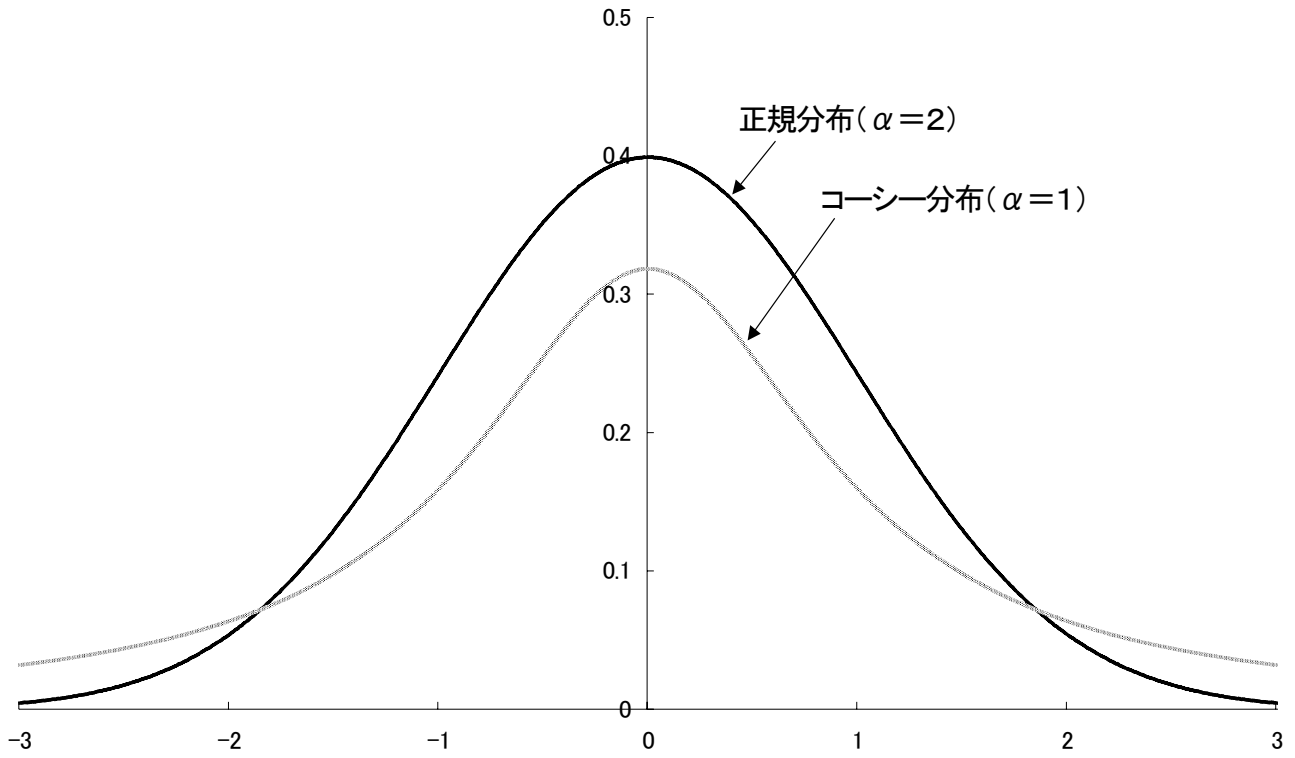
## 7 おわりに

本稿では、期待ショートフォールの実務への応用可能性を探るため、その推計値の安定性、それに対するリスク・ファクターの寄与度の算出、それに基づくポートフォリオの最適化の 3 点を検討した。この結果、「各リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオの最適化が容易な点で期待ショートフォールは VaR よりも優れているが、損失額分布の裾が厚い場合は、期待ショートフォールと VaR を同じ回数のシミュレーションで求めると、前者の推計値の方が不安定化するため、期待ショートフォールを安定的に推計するためには、VaR の推計に比べより多くのシミュレーション回数が必要となる」との結論が得られた。

山井・吉羽[2001]で示したように、期待ショートフォールは VaR に比べて概念的に優れたリスク指標である。これに加えて、期待ショートフォールは、リスク・ファクターの寄与度の算出やポートフォリオ最適化といった一部の実務で優れたリスク指標であることになる。しかし、シミュレーション法で期待ショートフォールを安定的に推計するためには、VaR の推計より多くのシミュレーション回数を確保する必要がある点には留意が必要である。

以上

図表 1 正規分布、コーシー分布の確率密度



図表 2 安定分布を仮定した場合の VaR および期待ショートフォール  
(信頼水準 95%)

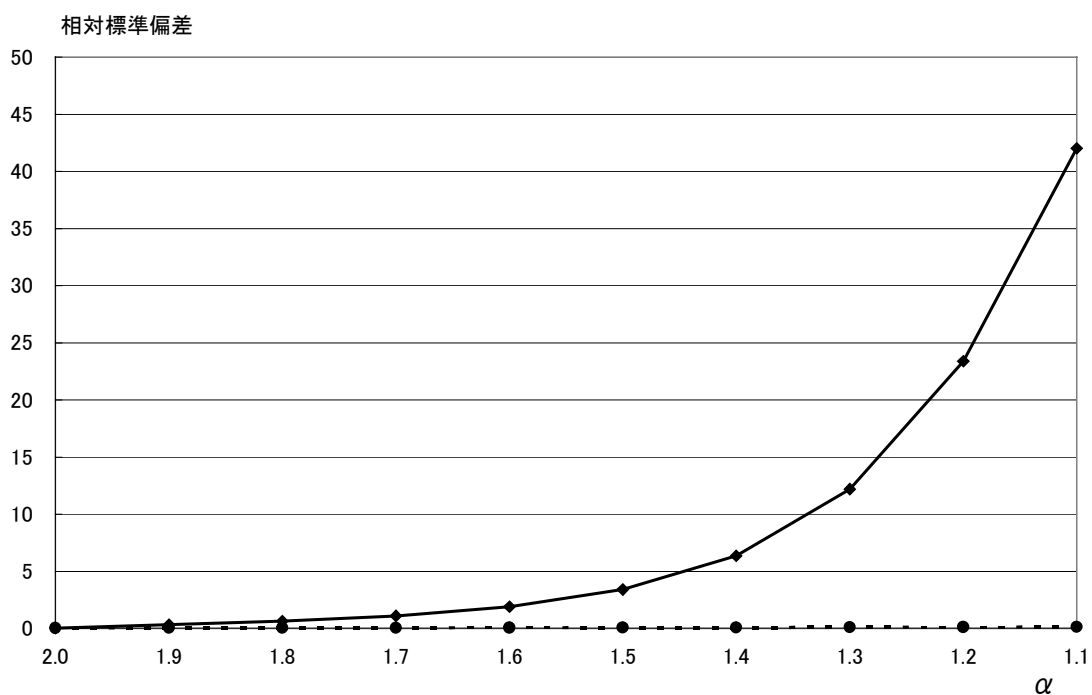
	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
2.0 (正規分布)	VaR	1.64	0.07	0.04	[ 1.51 1.77]
	期待ショートフォール	2.05	0.08	0.04	[ 1.90 2.21]
1.9	VaR	1.70	0.08	0.04	[ 1.55 1.85]
	期待ショートフォール	2.42	0.80	0.33	[ 2.06 3.14]
1.8	VaR	1.77	0.09	0.05	[ 1.60 1.95]
	期待ショートフォール	2.90	1.81	0.63	[ 2.28 4.20]
1.7	VaR	1.86	0.11	0.06	[ 1.67 2.08]
	期待ショートフォール	3.53	3.84	1.09	[ 2.58 5.60]
1.6	VaR	1.98	0.13	0.07	[ 1.75 2.26]
	期待ショートフォール	4.39	8.34	1.90	[ 2.96 7.62]
1.5	VaR	2.15	0.16	0.08	[ 1.86 2.50]
	期待ショートフォール	5.67	19.31	3.41	[ 3.48 10.71]
1.4	VaR	2.38	0.21	0.09	[ 2.02 2.82]
	期待ショートフォール	7.71	48.95	6.35	[ 4.16 15.76]
1.3	VaR	2.68	0.26	0.10	[ 2.22 3.25]
	期待ショートフォール	11.46	139.60	12.19	[ 5.10 25.13]
1.2	VaR	3.08	0.34	0.11	[ 2.49 3.85]
	期待ショートフォール	19.79	463.10	23.40	[ 6.48 42.45]
1.1	VaR	3.65	0.46	0.13	[ 2.86 4.67]
	期待ショートフォール	44.41	1,866.40	42.03	[ 8.59 81.44]



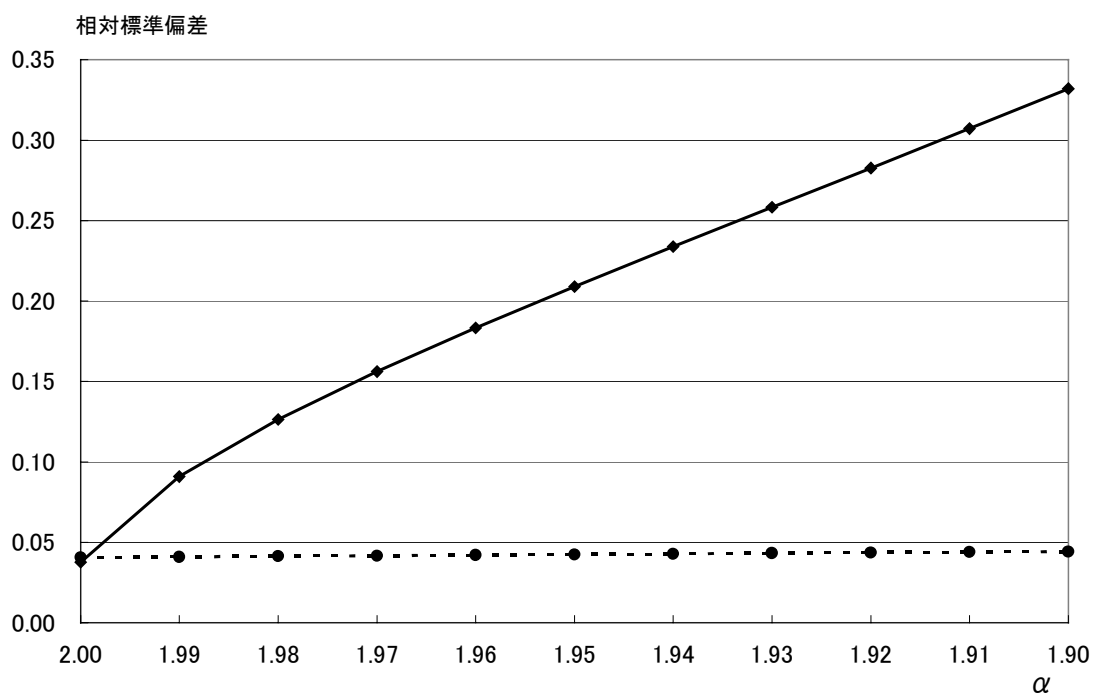
図表 3 安定分布を仮定した場合の VaR および期待ショートフォール  
(信頼水準 99%)

	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
2.0 (正規分布)	VaR	2.30	0.12	0.05	[ 2.09 2.54]
	期待ショートフォール	2.62	0.14	0.05	[ 2.36 2.90]
1.9	VaR	2.57	0.20	0.08	[ 2.25 3.03]
	期待ショートフォール	3.94	3.68	0.93	[ 2.70 7.02]
1.8	VaR	3.00	0.35	0.12	[ 2.47 3.86]
	期待ショートフォール	5.58	8.36	1.50	[ 3.27 11.25]
1.7	VaR	3.61	0.55	0.15	[ 2.78 4.94]
	期待ショートフォール	7.70	17.74	2.30	[ 4.05 16.84]
1.6	VaR	4.40	0.78	0.18	[ 3.23 6.29]
	期待ショートフォール	10.66	38.62	3.62	[ 5.01 25.03]
1.5	VaR	5.41	1.08	0.20	[ 3.81 8.00]
	期待ショートフォール	15.16	89.50	5.91	[ 6.31 37.93]
1.4	VaR	6.76	1.49	0.22	[ 4.56 10.37]
	期待ショートフォール	22.76	226.92	9.97	[ 8.02 60.08]
1.3	VaR	8.63	2.10	0.24	[ 5.58 13.64]
	期待ショートフォール	37.59	647.21	17.22	[10.39 100.13]
1.2	VaR	11.34	3.04	0.27	[ 7.00 18.77]
	期待ショートフォール	72.74	2,147.04	29.52	[13.90 176.21]
1.1	VaR	15.53	4.63	0.30	[ 9.09 26.85]
	期待ショートフォール	181.77	8,653.26	47.61	[19.63 351.63]

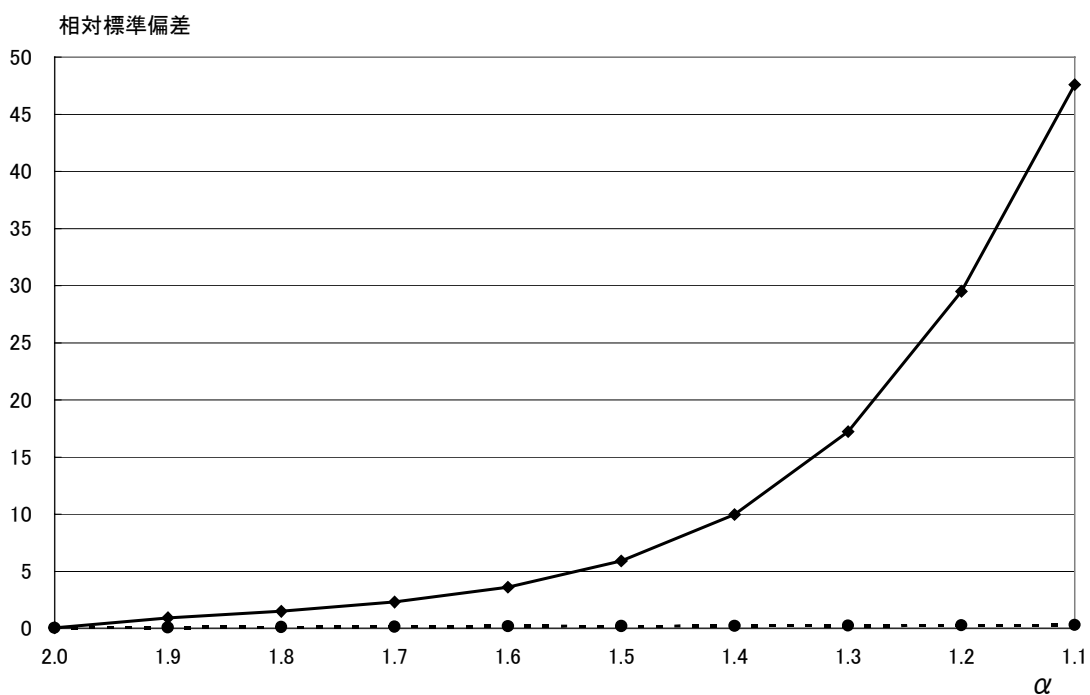
図表 4 安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準 95%）  
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）



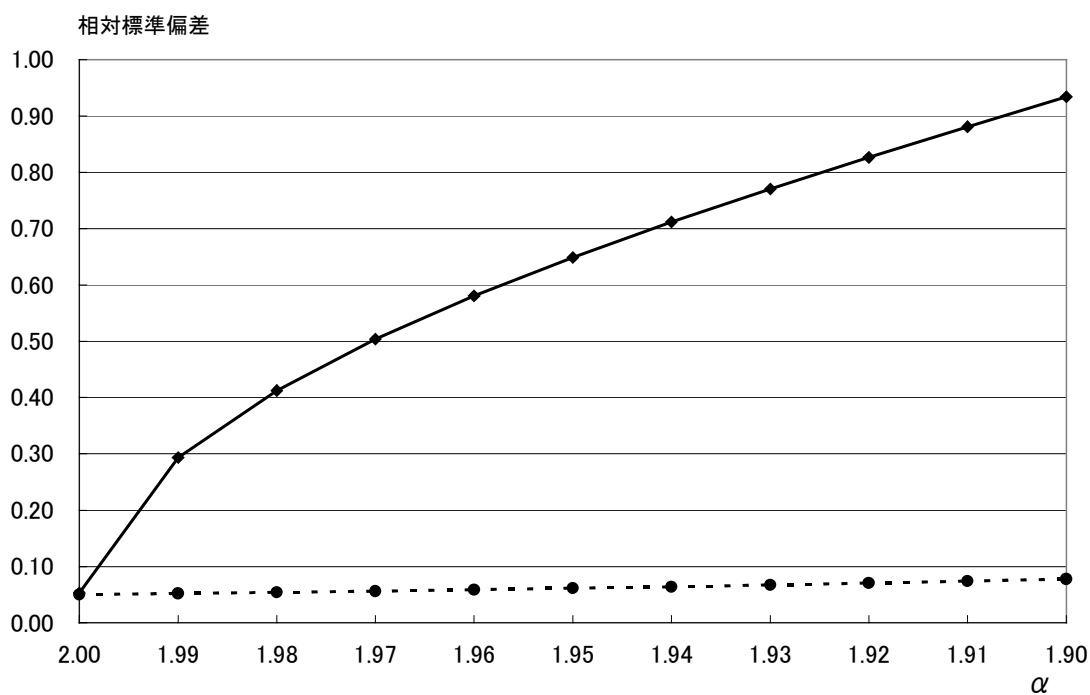
図表 5 安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準 95%）  
< 1.9 2 の拡大図 >  
（実線：期待ショートフォール、破線：VaR）



図表 6 安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準 99%）  
 （実線：期待ショートフォール、破線：VaR）



図表 7 安定分布における推計値の相対標準偏差（信頼水準 99%）  
 < 1.9 2 の拡大図 >  
 （実線：期待ショートフォール、破線：VaR）



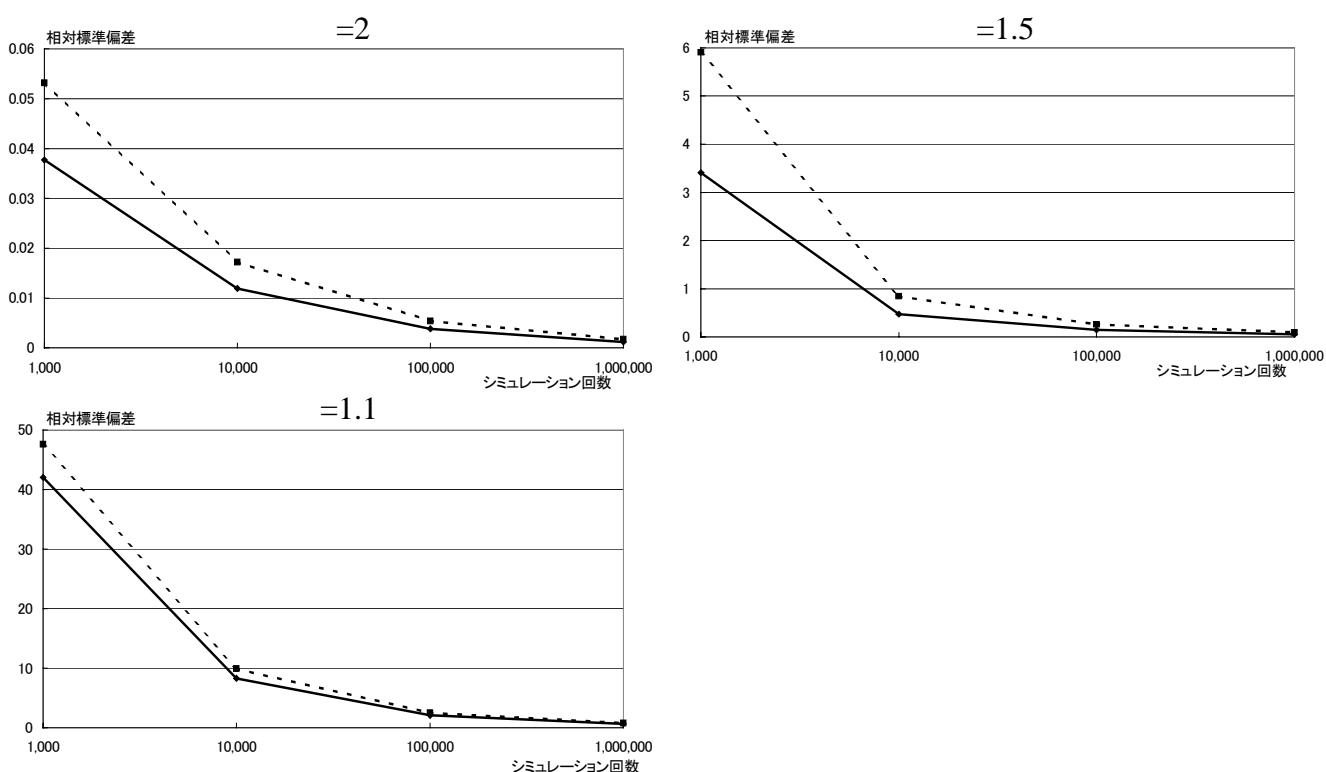
図表 8 安定分布を仮定した場合の期待ショートフォールの収束状況（信頼水準 95%）

シミュレーション回数	= 2.0		= 1.5		= 1.1	
	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)
1,000 回	0.04	[1.90 2.21]	3.41	[3.48 10.71]	42.03	[ 8.59 81.44]
10,000 回	0.01	[2.01 2.11]	0.47	[4.51 8.01]	8.29	[14.02 75.20]
100,000 回	0.00	[2.05 2.08]	0.15	[5.09 6.91]	2.07	[18.80 76.69]
1,000,000 回	0.00	[2.06 2.07]	0.05	[5.41 6.28]	0.64	[22.64 71.65]

図表 9 安定分布を仮定した場合の期待ショートフォールの収束状況（信頼水準 99%）

シミュレーション回数	= 2.0		= 1.5		= 1.1	
	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)	相対標準偏差	推計値の信頼区間 (95%)
1,000 回	0.05	[2.36 2.90]	5.91	[ 6.31 37.93]	47.61	[19.63 351.63]
10,000 回	0.02	[2.57 2.75]	0.84	[10.40 27.33]	9.91	[43.86 346.70]
100,000 回	0.01	[2.64 2.69]	0.26	[13.07 22.08]	2.50	[66.87 356.04]
1,000,000 回	0.00	[2.67 2.67]	0.10	[14.58 18.96]	0.78	[85.99 330.92]

図表 10 安定分布を仮定した時の期待ショートフォールの推計値の収束状況  
（実線：信頼水準 95%、破線：信頼水準 99%）

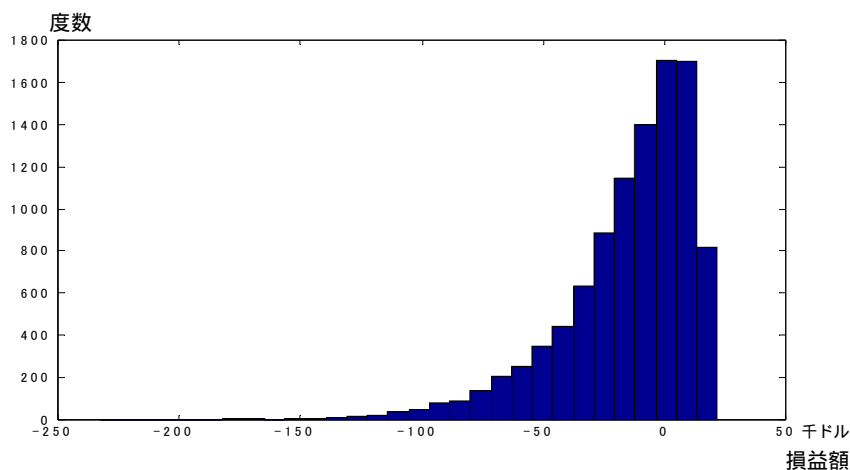


図表 11 オプション・ポートフォリオ

	満期までの 期間(日)	ストライク (米ドル)	価 格 (オプション・プ レミアム、ドル)	投資金額 (千米ドル)	ポジション (千枚)
GE 株式			49-13/16	1,000	20.1
マクドナルド株式			31-1/4	1,000	32.0
インテル株式			42-1/32	1,000	23.8
GE 株コール・オプション	18	50.00	2	-100	-50.0
マクドナルド株コール・オプション	18	30.00	1-3/4	-100	-57.1
インテル株コール・オプション	18	40.00	3-1/2	-100	-28.6

\* 価格(2000年11月28日時点)はブルームバーグ社から取得。

図表 12 サンプル・ポートフォリオの損益額分布(シミュレーション回数 10,000 回)



\* このグラフでは、本文の表記とは異なり、利益をプラス、損失をマイナスとして損益額をとっている。

図表 13 オプション・ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果(信頼水準 95%)

シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
1,000 回	VaR	68.33	3.34	0.0489	[61.72 75.03]
	期待ショートフォール	91.20	4.63	0.0508	[82.44 100.30]
10,000 回	VaR	68.18	1.05	0.0154	[66.10 70.22]
	期待ショートフォール	91.56	1.38	0.0151	[88.97 94.26]
100,000 回	VaR	68.15	0.33	0.0049	[67.51 68.81]
	期待ショートフォール	91.57	0.46	0.0050	[90.73 92.50]

図表 14 オプション・ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果 (信頼水準 99%)

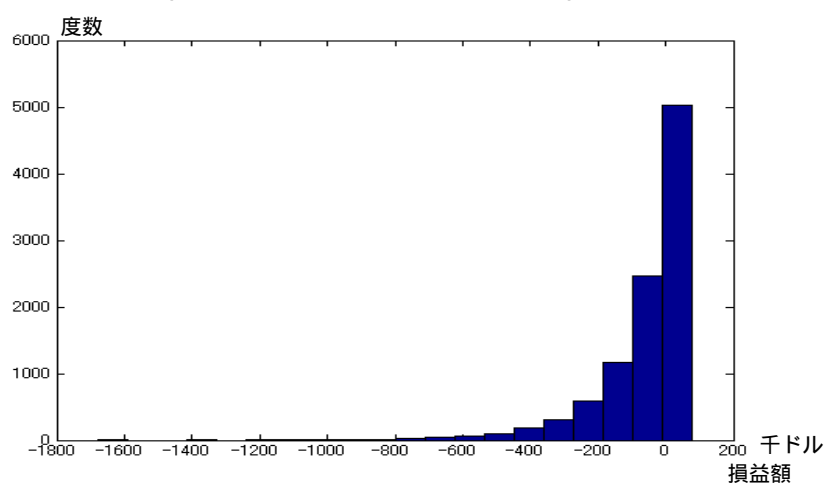
シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
1,000 回	VaR	107.00	7.50	0.0701	[ 93.16 123.31]
	期待ショートフォール	127.10	9.47	0.0745	[109.94 146.46]
10,000 回	VaR	106.23	2.28	0.0215	[101.82 110.81]
	期待ショートフォール	128.35	3.10	0.0242	[122.46 134.68]
100,000 回	VaR	105.97	0.71	0.0067	[104.53 107.37]
	期待ショートフォール	128.28	0.99	0.0078	[126.30 130.31]

図表 15 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオ

	満期までの 期間(日)	ストライク (米ドル)	価 格 (オプション・ プレミアム、ドル)	投資金額 (千米ドル)	ポジション (千枚)
GE 株式			49-13/16	1,000	20.1
マクドナルド株式			31-1/4	1,000	32.0
インテル株式			42-1/32	1,000	23.8
GE 株コール・オプション	18	58-3/8	3/16	-100	-533.3
マクドナルド株コール・オプション	18	40	1/16	-100	-1,600.0
インテル株コール・オプション	18	55	1/16	-100	-1,600.0

\* 価格 (2000 年 11 月 28 日時点) はブルームバーグ社から取得。

図表 16 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオの損益額分布  
(シミュレーション回数 10,000 回)



\* このグラフでは、本文の表記とは異なり、利益をプラス、損失をマイナスとして損益額をとっている。

図表 17 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオの VaR および期待  
ショートフォールの推計結果 (信頼水準 95%)

シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
1,000 回	VaR	334.62	22.01	0.0658	[293.70 380.86]
	期待ショートフォール	500.46	35.00	0.0699	[433.38 571.32]
10,000 回	VaR	332.56	7.06	0.0212	[318.53 346.88]
	期待ショートフォール	502.01	11.17	0.0222	[481.57 524.05]
100,000 回	VaR	332.26	2.15	0.0065	[328.14 336.70]
	期待ショートフォール	502.19	3.45	0.0069	[495.53 509.05]

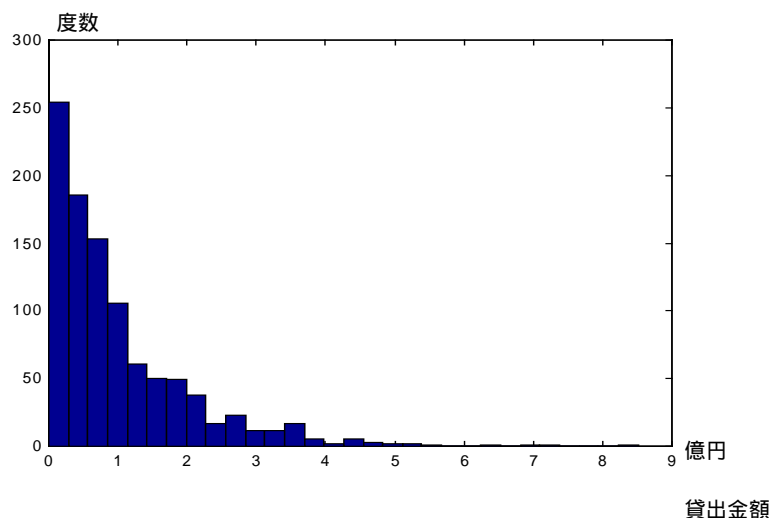
図表 18 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオの VaR および期待  
ショートフォールの推計結果 (信頼水準 99%)

シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
1,000 回	VaR	612.56	58.08	0.0948	[506.46 739.03]
	期待ショートフォール	781.31	85.48	0.1094	[625.85 964.29]
10,000 回	VaR	602.79	18.42	0.0306	[566.84 639.76]
	期待ショートフォール	790.73	27.46	0.0347	[738.77 849.00]
100,000 回	VaR	602.25	5.57	0.0093	[591.23 613.17]
	期待ショートフォール	792.14	9.13	0.0115	[774.75 810.97]

図表 19 与信ポートフォリオ

エクスポージャー総額	1,000 億円
エクスポージャー数	1,000 先
個別与信先への エクスポージャー額	平均 1 億円の指数分布に従う
損失額の定義	デフォルト・モード(リスク評価期間内に債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生)
回収率	ゼロ
デフォルト事象の発生	個々のエクスポージャー間のデフォルト相関は一定で、 $\rho = 0.00, 0.03, 0.05$ をとると仮定。

図表 20 サンプル・与信ポートフォリオのエクスポージャーの分布



図表 21 与信ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果  
(信頼水準 95%、デフォルト率 1%、シミュレーション回数 1,000 回)

デフォルト相関	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
0.00	VaR	18.28	0.43	0.0233	[17.39 19.10]
	期待ショートフォール	20.99	0.52	0.0248	[20.03 22.02]
0.03	VaR	41.03	3.13	0.0763	[35.05 47.45]
	期待ショートフォール	69.09	5.98	0.0865	[57.71 81.80]
0.05	VaR	45.79	4.37	0.0955	[37.95 54.62]
	期待ショートフォール	86.16	8.79	0.1021	[71.37 104.95]

図表 22 与信ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果  
(信頼水準 99%、デフォルト率 1%、シミュレーション回数 1,000 回)

デフォルト相関	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
0.00	VaR	22.65	0.79	0.0350	[21.21 24.33]
	期待ショートフォール	24.90	1.02	0.0408	[22.99 26.99]
0.03	VaR	85.03	9.79	0.1151	[67.39 106.34]
	期待ショートフォール	117.55	15.90	0.1353	[89.42 151.08]
0.05	VaR	108.34	14.31	0.1321	[83.53 141.34]
	期待ショートフォール	158.03	23.53	0.1489	[118.87 208.67]



図表 23 与信ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果(信頼水準 95%、デフォルト率 0.1%、シミュレーション回数 1,000 回)

デフォルト相関	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
0.00	VaR	3.99	0.20	0.0508	[3.62 4.38]
	期待ショートフォール	5.45	0.28	0.0522	[4.93 6.04]
0.03	VaR	4.72	0.71	0.1500	[3.50 6.37]
	期待ショートフォール	15.54	3.15	0.2029	[10.26 22.52]
0.05	VaR	3.92	0.72	0.1826	[2.74 5.53]
	期待ショートフォール	17.32	4.23	0.2444	[10.74 27.30]

図表 24 与信ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果(信頼水準 99%、デフォルト率 0.1%、シミュレーション回数 1,000 回)

デフォルト相関	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c) = (b)/(a)	推計値の信頼 区間(95%)
0.00	VaR	6.37	0.48	0.0757	[5.53 7.37]
	期待ショートフォール	7.70	0.59	0.0769	[6.59 8.89]
0.03	VaR	19.40	4.25	0.2189	[12.74 29.76]
	期待ショートフォール	39.62	11.45	0.2891	[22.20 66.87]
0.05	VaR	21.11	5.43	0.2574	[12.83 33.21]
	期待ショートフォール	49.32	16.06	0.3257	[25.82 88.95]

図表 25 サンプル・ポートフォリオにおける VaR (信頼水準 95%) の分解

	限界 VaR (米ドル/枚) (a)	投資金額 (千米ドル)	ポジション (千枚) (b)	構成要素 VaR (千米ドル) (c)=(a) × (b)
GE 株式	-2.30	1,000	20.1	-46.12
マクドナルド株式	-1.67	1,000	32.0	-53.58
インテル株式	0.60	1,000	23.8	14.17
GE 株コール・オプション	-1.55	-100	-50.0	77.50
マクドナルド株コール・オプション	-1.53	-100	-57.1	87.43
インテル株コール・オプション	0.37	-100	-28.6	-10.71
合計		2,700		68.70

図表 26 限界 VaR (信頼水準 95%) の比較

	限界 VaR (米ドル枚)	再計算限界 VaR (米ドル枚)		
		前後への変化幅: 0.1%	前後への変化幅: 0.5%	前後への変化幅: 1%
GE 株式	-2.30	-1.20	-0.44	-1.60
マクドナルド株式	-1.67	-2.75	-2.55	-1.86
インテル株式	0.60	-0.37	0.33	0.46
GE 株コール・オプション	-1.55	-1.05	-0.82	-1.20
マクドナルド株コール・オプション	-1.53	-2.20	-1.46	-1.64
インテル株コール・オプション	0.37	-0.14	0.12	0.50

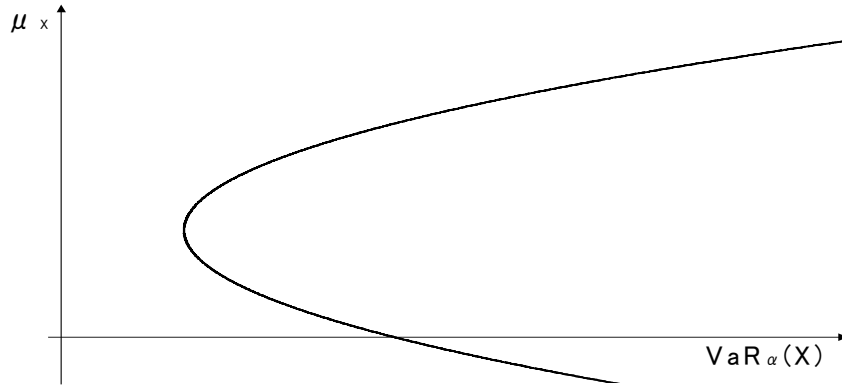
図表 27 サンプル・ポートフォリオにおける期待ショートフォール (信頼水準 95%) の分解

	限界 ES (米ドル枚) (a)	投資金額 (千米ドル)	ポジション (千枚) (b)	構成要素 ES (千米ドル) (c)=(a) × (b)
GE 株式	-3.33	1,000	20.1	-66.92
マクドナルド株式	-2.10	1,000	32.0	-67.1
インテル株式	0.15	1,000	23.8	3.57
GE 株コール・オプション	-2.30	-100	-50.0	115.23
マクドナルド株コール・オプション	-1.91	-100	-57.1	108.93
インテル株コール・オプション	0.08	-100	-28.6	-2.28
合計		2,700		91.43

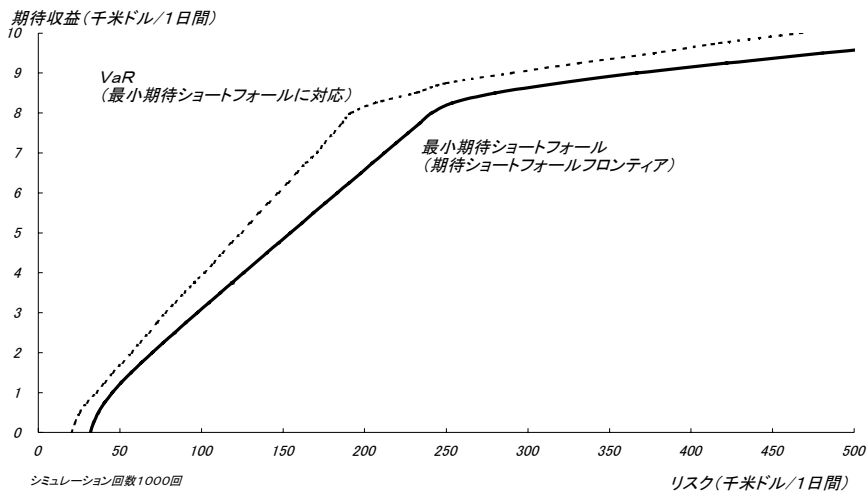
図表 28 限界期待ショートフォール (信頼水準 95%) の比較

	限界 ES (米ドル枚)	再計算限界 ES (米ドル枚)		
		前後への変化幅: 0.1%	前後への変化幅: 0.5%	前後への変化幅: 1%
GE 株式	-3.33	-3.34	-3.34	-3.34
マクドナルド株式	-2.10	-2.10	-2.10	-2.10
インテル株式	0.15	0.15	0.15	0.15
GE 株コール・オプション	-2.30	-2.31	-2.31	-2.31
マクドナルド株コール・オプション	-1.91	-1.91	-1.90	-1.91
インテル株コール・オプション	0.08	0.08	0.08	0.08

図表 29 期待収益と VaR による効率的フロンティア



図表 30 最小期待ショートフォール・フロンティア



図表 31 最小期待ショートフォール・フロンティアのポートフォリオ構成  
(期待収益額：5 千円、期待ショートフォール：154.4 千円)

	最適投資金額 (千円)
GE 株式	0
マクドナルド株式	1,714.45
インテル株式	1,113.05
GE 株コール・オプション	0
マクドナルド株コール・オプション	0
インテル株コール・オプション	-127.50

## 補論 A リスク指標の推計値の標準偏差の解析的な評価方法

### (1) 解析的な評価方法

信頼水準が  $100(1-\alpha)\%$  の VaR は損失額分布の分位点である。すなわち、 $n$  回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を  $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(1)}$  とすると、VaR の推計値は  $X_{(n\alpha+1)}$  である。

計算回数  $n$  が十分に大きい場合、この分位点は漸近的に正規分布に従い、その標準偏差は、次式で表わされることがわかっている (Stuart and Ord [1994] pp.356-358 を参照)。

$$\sigma_{\text{VaR}_\alpha(X)} = \frac{1}{f(x_\alpha)} \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}, \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $f(x)$  は損失額  $X$  が従う分布の密度関数。

一方、期待ショートフォールの推計値は次式で表わされる。

$$ES_\alpha = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha+1}. \quad (\text{A-2})$$

この推計値の標準偏差は、計算回数  $n$  が十分に大きい場合、次式で近似することができる (導出方法は後述)。

$$\begin{aligned} \sigma_{ES_\alpha(X)} = \frac{1}{\sqrt{n}} & \left[ \frac{(1-\alpha)x_{1-\alpha}^2 + \beta x_{1-\beta}^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x^2 f(x) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left\{ \beta x_{1-\beta} + (1-\alpha)x_{1-\alpha} + \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x f(x) dx \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

ただし、 $\beta$  は  $\beta \ll \alpha$  なる定数、 $x_{1-\alpha}$ 、 $x_{1-\beta}$  は、それぞれ損失額  $X$  の分布の  $1-\alpha$ 、 $1-\beta$  分位点<sup>30</sup>。

<sup>30</sup> 数学的には、 $F(x)$  を損失額  $X$  の分布関数、 $F^{-1}(x)$  を  $F(x)$  の逆関数として、 $x_{1-\alpha} = F^{-1}(1-\alpha)$ 、 $x_{1-\beta} = F^{-1}(1-\beta)$  と表される。

(2) 解析的評価による結果とシミュレーション結果との比較

次頁の表は、損失額が正規分布、t-分布（自由度=5）<sup>31</sup>、パレート分布（ $\alpha=2$ ）<sup>32</sup>に従うことを仮定し<sup>33</sup>、(A-2)式と(A-3)式を用いて解析的に評価した推計値の標準偏差と、3章と同じ方法によりシミュレーションにより評価した推計値の標準偏差とを比較したものである。t-分布、パレート分布は、正規分布に比べ裾の厚い分布である。損益額が正規分布またはt-分布に従う場合は、推計値の標準偏差を解析的な方法で求めた値とシミュレーション結果を用いて求めた値とでは両者に大きな差はない。しかし、損失額がパレート分布に従う場合、両者は大きく異なる。

VaR と期待ショートフォールの推計値の標準偏差  
(解析的評価とシミュレーションとの比較) シミュレーション回数：1,000 回

・信頼水準：95%

	VaR		期待ショートフォール	
	解析的評価	シミュレーション	解析的評価	シミュレーション
正規分布（標準偏差=1）	0.0668	0.0664	0.0780	0.0773
t-分布（自由度=5）	0.1080	0.1074	0.1885	0.1872
パレート分布（ $\alpha=2$ ）	0.3082	0.3090	1.6124	2.0818

・信頼水準：99%

	VaR		期待ショートフォール	
	解析的評価	シミュレーション	解析的評価	シミュレーション
正規分布（標準偏差=1）	0.1181	0.1153	0.1449	0.1386
t-分布（自由度=5）	0.2884	0.2839	0.5346	0.5068
パレート分布（ $\alpha=2$ ）	1.5732	1.5721	7.0509	8.9681

\* シミュレーションによる評価に用いたシミュレーションのセット数は 100,000 回、期待ショートフォールの解析的評価の際の  $n$  は  $10^5$  とした。

<sup>31</sup> 自由度  $m$  の t-分布の確率密度関数は次式で表わされる。

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot m} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \quad \text{ただし } \Gamma(\cdot) \text{ はガンマ関数}$$

<sup>32</sup> パレート分布の確率密度関数は次式で表わされる。

$$f(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}} \quad x \geq 1$$

<sup>33</sup> 推計値の標準偏差を解析的に評価するために、ここでは確率密度関数を解析的に表現できる分布として正規分布、t-分布、パレート分布を例として挙げた。

(3) 期待ショートフォールの推計値の標準偏差の解析的な評価方法の導出

(A-3)式で示された期待ショートフォールの標準偏差の解析的な評価方法は、頑健推定の研究成果<sup>34</sup>を用いて、以下のように導出できる<sup>35</sup>。

ここでは、期待ショートフォールの推計値が順序統計量の線形結合であるため、頑健推定のL推定量で近似できることに着目する。後述するように、L推定量は、一定の前提の下で、漸近的に正規分布に従い、その分散が定式化されている。したがって、この定式化を用いることで、期待ショートフォールの推定値の標準偏差を近似的に求めることができる。まず、 $\beta \ll \alpha$ なる定数 $\beta$ をとり、 $n$ 回のシミュレーションで得た損失額を昇順に並べた値を $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(n\beta)}, \dots, X_{(1)}$ として、以下の推計値を考える。

$$ES_{\alpha, \beta} = \frac{X_{(n\beta)} + \dots + X_{(n\alpha)}}{n(\alpha - \beta)} = \frac{1}{n} \sum_{i=n\beta}^{n\alpha} \frac{1}{\alpha - \beta} X_{(i)}. \quad (A-4)$$

この推計値は、 $n$ が十分に大きい場合に、 $\beta$ を十分に小さくとることによって期待ショートフォールの推計値((A-2)式)の近似値を与える。ここで、次式で表わされる重み付け関数 $h$ を定義する。

$$\begin{aligned} h(u) &= 1/(\alpha - \beta) & 1 - \alpha \leq u \leq 1 - \beta, \\ &= 0 & \text{その他の場合.} \end{aligned} \quad (A-5)$$

このとき、(A-4)式は以下のように表わすことができる。

$$ES_{\alpha, \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{i}{n}\right) X_{(i)}. \quad (A-6)$$

ここで、損失額が従う分布の分布関数を $F(x)$ 、密度関数を $f(x)$ 、分布関数の逆関数を $T(x) = F^{-1}(x)$ とすると、この推計量の影響曲線(あるいは影響関数)<sup>36</sup>は、Huber[1981]の(3.12)式に(A-5)式を代入することで次式として得られる。

$$\begin{aligned} IC(x, F, T) &= \int_{-\infty}^x h(F(y)) dy - \int_{-\infty}^x (1 - F(y)) h(F(y)) dy \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ (1 - \beta) F^{-1}(1 - \beta) - (1 - \alpha) F^{-1}(1 - \alpha) - \int_{1 - \alpha}^{1 - \beta} F^{-1}(v) dv \right\} \\ &\quad - \int_{F(x)}^1 h(v) (F^{-1}(v))' dv. \end{aligned} \quad (A-7)$$

<sup>34</sup> 頑健推定の詳細に関しては Huber[1981]を参照。

<sup>35</sup> ここでの説明は、竹内[1989]を参考にした。

<sup>36</sup> 影響曲線の定義などの詳細は Huber[1981]を参照。

Huber[1981]の Theorem 3.2 によると、一定の前提<sup>37</sup>を満たす L 推定量は、漸近的に正規分布に従い、その分散は  $(1/n) \int_{-\infty}^{\infty} IC(x, F, T)^2 f(x) dx$  で与えられる。これを  $ES_{\alpha, \beta}$  に適用すると、その分散を次式として得ることができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ES_{\alpha, \beta}}^2 &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} IC(x, F, T)^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{n} \left[ \frac{(1-\alpha)x_{1-\alpha}^2 + \beta x_{1-\beta}^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x^2 f(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left\{ \beta x_{1-\beta} + (1-\alpha)x_{1-\alpha} + \int_{x_{1-\alpha}}^{x_{1-\beta}} x f(x) dx \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (A-8)$$

したがって、(A-3)式が得られる。

---

<sup>37</sup>  $\alpha$  をある正の定数として重み関数  $h$  の台 ( support ) が区間  $[\alpha, 1-\alpha]$  に含まれていること、分布関数  $F$  の不連続点と  $h$  の不連続点とが一致しないことなど。ここではこれらの前提はすべて満たされている。

## 補論 B オプション・ポートフォリオのシミュレーション方法

ここでは、4章の米国株オプション・ポートフォリオのシミュレーションによるリスク量計測方法を説明する。

### (1) 株価

株価(3銘柄が対象)の対数値が3変量正規分布に従うと仮定してシミュレーションを行った。まず、過去3年分のヒストリカル・データから株価の日次対数変化率の分散・共分散行列および平均を推計した。この分散・共分散行列にコレスキー分解を施し求めた行列を互いに独立な標準正規乱数からなるベクトルにかけ、さらに平均的な価格上昇による増加分を加えて株価の1日の対数変化率とした。

### (2) オプション・プレミアム

まず、図表 11および 15にある株価とオプション・プレミアムから、各オプションのインプライド・ボラティリティを計算した。そのボラティリティが保有期間(1日)中一定であると仮定し、ブラック・ショールズ式により保有期間終了後のオプション・プレミアムを計算した。

なお、これら米国株の個別株コール・オプションはアメリカン・タイプのオプションであるが、いずれの株式もオプションの満期まで配当の支払いが見込まれていないため、そのプレミアムはヨーロッパ・タイプのオプションのそれと同じとなる<sup>38</sup>。

---

<sup>38</sup> Hull [2000] pp.175-176などを参照。



## 補論 C 与信ポートフォリオのシミュレーション方法

以下では、4章の与信ポートフォリオのシミュレーション手法を家田・丸茂・吉羽[2000]から抜粋・要約する形で解説する。

デフォルト率・デフォルト相関が同一である多数の与信のデフォルト事象は次のような多変量のベルヌーイ乱数  $D_i (i=1,2,\dots,n)$  として表現することができる。

$$D_i = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p), \\ 0 & (\text{確率 } 1-p). \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

すなわち、 $D_i (i=1,2,\dots,n)$  は、ポートフォリオ ( $n$  個のエクスポージャーから構成される) 内のエクスポージャー  $i$  が確率  $p$  で 1 (デフォルト)、確率  $1-p$  で 0 (非デフォルト) という値をとる。さらに、各  $D_i$  の相関係数 (デフォルト事象の相関) を  $\rho$  (一律) とする。相関を考慮した多変量ベルヌーイ乱数を直接発生させることは難しいため、コレスキー分解を使って相関を考慮した乱数を発生させることが可能な多変量正規分布を介して、ベルヌーイ乱数を発生させる手法を考える。

まず、いずれも平均 0、分散 1 の正規分布に従う確率変数  $X_i (i=1,2,\dots,n)$  を考える (ただし、各確率変数は独立ではなく、一律の相関係数で表わされる相関関係があるとする)。このとき、 $D_i$  は

$$D_i = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p)), \\ 0 & (\Phi^{-1}(p) < X_i < \infty), \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

ただし、 $\Phi^{-1}(\cdot)$  は標準正規分布の累積密度関数の逆関数

と表すことができる。

$D_i (i=1,2,\dots,n)$  間の相関係数が  $\rho$  になるためには、 $X_i (i=1,2,\dots,n)$  間の相関係数  $\tilde{\rho}$  を適当に定めればよい。 $\rho$  は

$$\rho = \frac{E[D_i D_j] - p^2}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{p(1-p)}}, \quad (\text{A-11})$$

と表される。ここで

$$D_i D_j = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p), -\infty < X_j \leq \Phi^{-1}(p)), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

であるので、 $E[D_i D_j]$ は、相関係数 $\tilde{\rho}$ を持つ2次元正規分布の累積密度関数

$$E[D_i D_j] = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2)}\{x_i^2 + x_j^2 - 2\tilde{\rho}x_i x_j\}\right) dx_i dx_j \quad (\text{A-13})$$

となる。

したがって、(A-13)式と(A-11)式から、(A-11)式を満たす $\tilde{\rho}$ を得ることが可能である（ただし、上記定積分の値は数値計算によって求める必要がある）。

以上によって、平均0、分散1、かつ一律 $\tilde{\rho}$ の相関係数を持つ $n$ 次元の多変量正規乱数を発生させ、(A-10)式によって $D_i$ を求めれば、目的の多変量ベルヌーイ乱数を得ることができる。ここで、エクスポージャー $i$ の与信エクスポージャー金額を $v_i$ 、デフォルト時の回収率を $r_i$  ( $0 \leq r_i \leq 1$ ) とすると、ポートフォリオの損失額 $L$ は、

$$L = \sum_{i=1}^n D_i v_i (1 - r_i), \quad (\text{A-14})$$

と表すことができる。

補論 D 期待ショートフォールの別表現の証明

ここでは、Rockafeller and Uryasev [2000]の結果を紹介する。

$$\Psi(\beta) = \int_{x \leq \beta} dF(x), \quad (\text{A-15})$$

と置く。  $\Psi(\beta)$  は損失  $x$  がある閾値  $\beta$  を超えない確率を示している (  $F(x)$  は分布関数 )。このとき、信頼水準が  $100\alpha\%$  の VaR は次の  $\beta_\alpha$  で定義できる。

$$\beta_\alpha = \min\{\beta \in \mathbf{R} \mid \Psi(\beta) \geq \alpha\}. \quad (\text{A-16})$$

一方、期待ショートフォールは損失  $x$  が  $\beta_\alpha$  以上という条件下での損失の期待値であり、

$$\phi_\alpha = (1-\alpha)^{-1} \int_{x \geq \beta_\alpha} x dF(x), \quad (\text{A-17})$$

で表される。

これらから、期待ショートフォールは次の関数  $F_\alpha(\beta)$  を  $\beta$  について最小化したものとなる ( 定理 1 )。

$$F_\alpha(\beta) = \beta + (1-\alpha)^{-1} \int_{x \in \mathbf{R}} [x - \beta]^+ dF(x). \quad (\text{A-18})$$

定理 1 ( Rockafeller and Uryasev [2000]の主要定理 )

$F_\alpha(\beta)$  は  $\beta$  の関数として凸であり、連続微分可能である。期待ショートフォールは

$$\phi_\alpha = \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta), \quad (\text{A-19})$$

で与えられる。ここで、

$$B_\alpha \equiv \arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta), \quad (\text{A-20})$$

と置く<sup>39</sup>。VaR は

$$\beta_\alpha = B_\alpha \text{の左端}, \quad (\text{A-21})$$

で与えられる。特に、

$$\beta_\alpha = \arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta) \text{ and } \phi_\alpha = F_\alpha(\beta_\alpha), \quad (\text{A-22})$$

が成立する。

<sup>39</sup>  $\arg \min_{\beta \in \mathbf{R}} F_\alpha(\beta)$  とは、 $F_\alpha(\beta)$  を最小化する  $\beta$  を指す。

以下では、定理 1 を証明するが、まず、次の補題を証明する。

補題

$x$  を固定して考え、 $G(\beta) = \int_{x \in \mathbf{R}} [x - \beta]^+ dF(x)$  とするとき、 $G(\beta)$  は凸であり  
 $G'(\beta) = \Psi(\beta) - 1$ 。

【証明】

$G(\beta)$  の凸性は  $\beta \mapsto [x - \beta]^+$  の凸性より示される。

また、 $G(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \beta) 1_{\{x - \beta \geq 0\}} dF(x)$  より<sup>40</sup>、

$$\begin{aligned} G'(\beta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x - \beta \geq 0\}} dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (x - \beta) \frac{\partial 1_{\{x - \beta \geq 0\}}}{\partial \beta} dF(x) \\ &= - \left\{ 1 - \int_{x \leq \beta} dF(x) \right\} = \Psi(\beta) - 1. \end{aligned} \tag{A-23}$$

(証明終)

この補題を用いて、定理 1 の証明を行う。

【定理 1 の証明】

補題より、

$$\frac{\partial}{\partial \beta} F_{\alpha}(\beta) = 1 + (1 - \alpha)^{-1} [\Psi(\beta) - 1] = (1 - \alpha)^{-1} [\Psi(\beta) - \alpha], \tag{A-24}$$

が得られ、また  $F_{\alpha}(\beta)$  が凸であることから、 $\Psi(\beta) - \alpha = 0$  を満たす  $\beta$  が  $F_{\alpha}(\beta)$  を最小化することになる (すなわち、 $\beta \in B_{\alpha}$ )。  $\Psi(\beta)$  は  $\beta$  に関して連続非減少関数であることから、 $\Psi(\beta) - \alpha = 0$  を満たす  $\beta$  は  $\Psi(\beta) \geq \alpha$  を満たす  $\beta$  の中で最小値となる。すなわち、 $\beta = \beta_{\alpha}$  である。よって、

---

<sup>40</sup> ここで、 $1_A$  は事象  $A$  が真のとき 1、偽のとき 0 をとる定義関数である。

$$\min_{\beta \in \mathbf{R}} F_{\alpha}(\beta) = F_{\alpha}(\beta_{\alpha}) = \beta_{\alpha} + (1-\alpha)^{-1} \int_{x \in \mathbf{R}} [x - \beta_{\alpha}]^{+} dF(x), \quad (\text{A-25})$$

となる。ここで(A-25)式の積分は、次のように表せる。

$$\int_{x \geq \beta_{\alpha}} [x - \beta_{\alpha}] dF(x) = \int_{x \geq \beta_{\alpha}} x dF(x) - \beta_{\alpha} \int_{x \geq \beta_{\alpha}} dF(x). \quad (\text{A-26})$$

ここで、(A-26)式の右辺第1項は期待ショートフォールの定義より  $(1-\alpha)\phi_{\alpha}$ 、第2項は  $1-\Psi(\beta_{\alpha})$  であり、 $\Psi(\beta_{\alpha}) = \alpha$  であることから、次の関係が成立する。

$$\min_{\beta \in \mathbf{R}} F_{\alpha}(\beta) = \beta_{\alpha} + (1-\alpha)^{-1} [(1-\alpha)\phi_{\alpha} - \beta_{\alpha}(1-\alpha)] = \phi_{\alpha}. \quad (\text{A-27})$$

これは、定理1の(A-19)式である。よって定理1は証明された。

(証明終)

## 参考文献

- 家田 明・丸茂 幸平・吉羽 要直、「与信ポートフォリオにおける信用リスクの簡便な算出方法」、『金融研究』、第 19 巻別冊第 2 号、日本銀行金融研究所、pp. 109-144、2000 年
- 今野 浩、『線形計画法』、日科技連、1987 年
- 今野 浩、『理財工学 : 数理計画法による資産運用最適化』、日科技連、1998 年.
- 竹内 啓 (編集委員代表)、『統計学辞典』、東洋経済新報社、1989 年
- 室町 幸雄、「個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化」、『ニッセイ基礎研 所報』、Vol. 16、ニッセイ基礎研究所、pp. 77-100、2001 年
- 山井 康浩・吉羽 要直、「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について 期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ」、『金融研究』、第 20 巻第 2 号、日本銀行金融研究所、pp. 33-68、2001 年
- Acerbi, C., and D. Tasche, “On the Coherence of Expected Shortfall,” Working Paper, 2001.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Thinking Coherently,” *Risk*, Vol. 10, No. 11, pp. 68-71, November 1997.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp.203-228, June 1999.
- Chambers, J. M., C. L. Mallows, and B. W. Stuck, “A Method for Simulating Stable Random Variables,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 71, No. 354, pp.340-344, 1976.
- Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*, John Wiley and Sons, 1969. (邦訳:『確率論とその応用 II (上・下)』、国沢清典監訳、紀伊国屋書店、1969 年)
- Garman, M., “Taking VaR to Pieces,” *Risk*, Vol. 10, No. 10, pp. 70-71, October 1997.

- Hallerbach, W. G., "Decomposing Value at Risk: A General Analysis," Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 99-034/2, 1999.
- Huber, P. J., *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, 1981.
- Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice-Hall, 2000.
- Mausser, H. and D. Rosen, "Beyond VaR: from Measuring Risk to Managing Risk," *ALGO Research Quarterly*, Vol. 1, No. 2, pp.5-20, 1998.
- Rockafeller, T., and S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value-at-Risk," *Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, pp. 21-41, Spring 2000.
- Shiryaev, A. N., *Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory*, World Scientific, 1999.
- Stuart, A., and J. K. Ord, *Kendall's Advanced Theory of Statistics Volume 1 Distribution Theory*, 6th Edition, Edward Arnold, London Melbourne Auckland, 1994
- Tasche, D., "Risk Contributions and Performance Measurement," Working Paper, Munich University of Technology, 2000.