IMES DISCUSSION PAPER SERIES

ノックアウト･オプション･アプローチを用いたデフォルト率の推定方法
―ヨーロピアン･オプション･アプローチとの比較分析―

安藤(あんどう) 啓(あきら)・丸茂(まるも)幸平(こうへい)

Discussion Paper No. 2001-J-4

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

IMES Discussion Paper Series 2001-J-4
2001 年 1 月

ノックアウト･オプション･アプローチを用いたデフォルト率の推定方法
―ヨーロピアン･オプション･アプローチとの比較分析―

安藤　啓（あんどう　あきら）＊・丸茂幸平（まるも　こうへい）＊

要　旨

本邦金融機関では信用リスク管理体制の整備に注力しているが、この核の 1 つが、与信先のデフォルト率の推定手法である。本稿では、各種推定手法のうち、企業の資本が企業の資産価値を原資産としたコール･オプションとみなせることを利用し、株式データからデフォルト率の推定を行う「オプション･アプローチ」の考察を行う。

オプション･アプローチの既存研究には、企業の資本が資産価値を原資産とするヨーロピアン型のコール･オプションであるとみなして推定を行うものが多い。これに対して、本稿では、ノックアウト型のコール･オプションとみなして推定を行う方法を提示し、これら 2 つのアプローチによるデフォルト率の推定方法を解説する。さらに、実際の市場データを利用した数値例により、両方法の比較・検討を行う。

実証結果からは、2 つのアプローチで算出されるデフォルト率の間には安定的な関係があること、両デフォルト率の時系列変動はほぼパラレルとなること、等が示された。また、両アプローチで計算されたデフォルト率は、格付機関による格付と比較すると概ね整合的な関係が見られた。このほか、デフォルト企業と非デフォルト企業との間の推定デフォルト率推移の比較により、デフォルト企業を事前に判別し得る可能性も示された。

最後に、本稿で解説したオプション･アプローチは理論上の問題点を内包していることを示し、その上で、この問題点を回避するために現在検討中の新たな方法のコンセプトを示した。

キーワード：信用リスク、デフォルト率、オプション･アプローチ、ヨーロピアン・オプション、ノックアウト･オプション

JEL classification: G19

* 日本銀行　金融研究所　研究第１課
（E-mail: akira.andou@boj.or.jp, kouhei.marumo@boj.or.jp）

本稿作成にあたっては、森平爽一郎教授（慶応大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属する。

目　次

１．はじめに 1

２．ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定 3

２－１　ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の基本的考え方 3

２－２　既存研究について 7

３．ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定 8

３－１　何故ノックアウト･オプション･アプローチか 8

３－２　ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の基本的考え方 8

４．実証分析 14

４－１　ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチとから計算されるデフォルト率の比較 15

４－２　デフォルト企業のデフォルト率推移 23

４－３　実証分析のまとめ 30

５．オプション･アプローチの理論上の問題点とそれを回避するための新たな方法 30

６．まとめと今後の研究課題 32

（補論）(3.12)**式の導出方法の概要** 34

（参考文献） 39

１．はじめに

本邦金融機関では、現在、信用リスク量の把握やリスク量に見合ったプライシング、あるいは部門別資本配賦などを行うための信用リスク管理体制の整備に注力している。こうした信用リスク管理体制整備で核となるのが、与信先のデフォルト率の推定方法である。デフォルト率を的確に推定することは、保有ポートフォリオのリスクを計量する場合やリスクに見合う適切なリターンを計算する場合の大前提である。したがって、デフォルト率推定の巧拙が、信用リスク管理体制整備が成功するか否かの鍵を握っていると言っても過言ではない。

デフォルト率推定のための手法としては、ファイナンス工学の理論を応用して定量的に推定を行う手法がいくつか提唱されている[1]。本稿では、これらの手法のうち、企業の資本が企業の資産価値を原資産としたコール･オプションとみなせることを利用し、株式データからデフォルト率の推定を行う「オプション･アプローチ」[2]の考察を行う。

具体的には、以下の 2 点に主眼をおく。

① オプション･アプローチの既存研究では、企業の資本が資産価値を原資産としたヨーロピアン型のコール･オプションであるとみなして推定を行う方法（以下、「ヨーロピアン･オプション･アプローチ」と呼称）が採用されているが[3]、本稿ではこれに代え、ノックアウト型のコール･オプションとみなして推定を行う方法（以下、「ノックアウト･オプション･アプローチ」と呼称）を示し、具体的なデフォルト率の推定方法を検討する。

② オプション･アプローチの本邦企業への適用可能性に注目し、ヨーロピアン･オプション･アプローチと、ノックアウト･オプション･アプローチの有

---

[1] ここで紹介するオプション･アプローチのほかにも、判別分析モデルやロジット･モデルに代表される非線型確率モデルなど様々なモデルが提唱されている（森平[1999～2000]）。オプション･アプローチには、「株価が市場参加者合意の下で決定されていると言う合理性と信頼性、株価がリアルタイムで利用可能である点」（森平[1999～2000]）の他、算出に必要な情報が比較的容易に入手できるなどの利点がある。

[2] この「オプション･アプローチ」の基本的な考え方は、R.マートンが初めて示した（Merton[1974]）。この手法に関する明快な解説は森平[1997]等を参照。なお、この「オプション･アプローチ」という呼称は斎藤･森平[1998]から採ったものである。

[3] オプション･アプローチに関する既存研究は、２－２参照。

効性について、実際の市場データを利用した数値例により比較・検討を行う。

ヨーロピアン･オプション･アプローチ、ノックアウト･オプション･アプローチとも、デフォルト率推定の対象となる企業が、資産、負債及び資本から構成され、資産価値が時間とともに確率的に変動すると仮定する。ヨーロピアン･オプション･アプローチではデフォルトを「予め設定された1時点に資産価値が負債価値を下回っている事象」とみなすのに対し、ノックアウト･オプション･アプローチでは、デフォルトを「現時点から、予め設定された 1 時点までの間に資産価値が負債価値を下回る事象」とみなす点が異なっている。３章で述べる通り、上場企業のような市場の目に晒されている企業の場合は、格付機関、企業アナリスト、銀行や取引先等は、決算発表で明らかになるような離散的な財務状況だけではなく、断続的なモニタリングによって、リアルタイムの財務状況も推定・把握していると仮定することが可能であると思われる。その仮定が実際に正しいとすると、デフォルトを引き起こすようなイベント（大幅な格下げ、銀行による短期与信引上げなど）はいつでも発生し得るとみなすことができる。この場合には、ヨーロピアン･オプション･アプローチで仮定されているように、デフォルトが発生し得る時点が予め分かっているとの前提でデフォルト率を推定することは適当でないとの考え方も成り立ち得よう。

本稿では、資産価値が負債価値を下回った時点で即デフォルトが発生すると仮定したノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率推定方法を示し、これを本邦企業に応用した推定結果を、ヨーロピアン･オプション･アプローチによる推定結果と比較する。また、実際にデフォルトした企業のデフォルト率を推定し、このアプローチの有効性を探ることとする。

本稿の構成は次の通りである。まず、2 章でヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定の枠組みを示す。次に、3 章でノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定の枠組みを示し、4 章ではこれら手法を実際の市場データに用いた数値例を示す。次に、5 章でオプション･アプローチが理論上の問題点を内包していることを示し、この問題点を回避するための現在検討中の新たな方法のコンセプトを示す。最後に、6 章で本稿のまとめを行うとともに、今後の研究課題を説明する。

２．ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定

ヨーロピアン･オプション･アプローチとは､企業の資本が資産価値を原資産としたヨーロピアン･コール･オプションであるとみなす考え方である。

ここでは、このヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の手法を解説するとともに、この手法に関する既存研究を説明する。

２－１　ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の基本的考え方

（１）ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の定式化

企業の資産価値 $A_t (0 \le t \le T)$ が、

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t \tag{2.1}$$

ただし、　μ_A ：　資産価値の期待収益率（定数）

σ_A ：　資産価値のボラティリティ（定数）

W_t ：　ウィナー過程

のような確率微分方程式で表される確率過程に従うと仮定する。時点 T は、予め設定されたある 1 時点であり、この時点 T での資産価値によって、デフォルトか非デフォルトかが決定される。

また、負債価値 B_t $(0 \le t \le T)$ は、

$$B_t \equiv B_0 \tag{2.2}$$

のように一定値と仮定する。

以上の仮定の下、オプション･アプローチでは、デフォルトを、時点 T で資産価値が負債価値を下回った状態、すなわち「$A_T < B_T$」と定義する。以下、$A_T < B_T$ となる確率を求める。

さて、時点 T における資産価値 A_T は、(2.1)式を解くことにより、

$$A_T = A_0 \exp\{(\mu_A - \sigma_A{}^2/2)T + \sigma_A W_T\} \tag{2.3}$$

と求められる。両辺の対数値をとると、

$$\log A_T = \log A_0 + (\mu_A - \sigma_A{}^2/2)T + \sigma_A W_T \qquad (2.4)$$

となり、これは資産の対数値が、平均$\log A_0 + (\mu_A - \sigma_A{}^2/2)T$、分散$\sigma_A{}^2 T$の正規分布に従うことを表している。

したがって、時点 0 から見た時点Tでのデフォルト率EDPは、

$$\begin{aligned} EDP &= \Pr(A_T < B_T) \\ &= \Pr(\log A_T < \log B_T) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(A_0/B_T) + (\mu_A - \sigma_A{}^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

と求まる。ただし、Φは標準正規分布の分布関数を表す。

（2）ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定に必要なパラメータ

上述の方法でデフォルト率を求めるには、パラメータ$A_0, B_T, \mu_A, \sigma_A, T$の具体的な値を与える必要がある。これらのうち、外生的に与える時点T以外、直接は市場等で観測することができない。したがって、$A_0, B_T, \mu_A, \sigma_A$は、別途仮定を導入して推定したり、便宜的に与える必要がある。以下では、本稿でのパラメータの与え方を解説する。

① 時点T

$T = 1$ 年とする。

② 時点Tにおける負債価値B_T

負債価値は市場で観測できないので、便宜的に、$B_T = B_0 =$「直近の負債の簿価」とする[4]。

③ 時点 0 における資産価値A_0

---

[4] 例えば、米国の信用リスク管理モデルのベンダーである KMV 社でも、同社のモデルでデフォルト率を推定する際には、負債簿価を使って負債価値を算出している。ただし、バランス･シート上の負債を、1 年以内の短期負債と 1 年超の長期負債に分けて、短期負債価値は短期負債簿価をそのまま、長期負債価値は長期負債簿価の 1/2 として、短期負債価値と長期負債価値の和を当該企業の負債価値としている（Crouhy et al.[2000]）。

株式時価総額と負債価値の和とする。すなわち、時点 0 における株価S_0と発行済み株式数nを既知として、$A_0 = nS_0 + B_0$とする。

④ 資産価値期待収益率μ_A

便宜上無リスクのスポット･レートrを利用し、$\mu_A = r$とする[5]。

⑤ 資産価値ボラティリティσ_A

株価、株式時価総額と資産価値の間に幾つかの関係を仮定することにより求める。

まず、株価S_t $(0 \le t \le T)$が

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t \tag{2.6}$$

のような確率微分方程式で表される確率過程に従っているとする。ここで株価の期待収益率μ_Sとボラティリティσ_Sは定数とし、過去の株価変動から推定する。

次に、時点tでの株式時価総額E_tを

$$E_t = nS_t \tag{2.7}$$

と定義する。$\{E_t\}_{0 \le t \le T}$が従う確率微分方程式を

$$dE_t = \mu_E E_t dt + \sigma_E E_t dW_t \tag{2.8}$$

と表すと、μ_E, σ_Eは定数で、$\mu_E = \mu_S, \sigma_E = \sigma_S$である。

当該企業の清算が時点Tまでには行われないものと仮定すると、時点Tでの発行済み株式全体の価値は､｢時点Tにおける資産価値から負債価値を引いた残り｣と考えられる。これを今までに定義した記号で表すと、

$$E_T = \max(A_T - B_T, 0) \tag{2.9}$$

が成り立つ。これは、原資産を当該企業の資産、権利行使価格をB_T、満期をTとするヨーロピアン･コール･オプションのペイ･オフに等しい。

このことを根拠に、時点t $(0 \le t \le T)$における株式時価総額E_tを、このヨーロ

---

[5] μ_Aの与え方は、本稿のように無リスク金利と等しいと仮定する以外にも、アナリストなどが経験に基づき独自に推定した値を利用したり、株価データから推定するなどの方法がある。本稿作成の過程でも株価変動からμ_Aを推定し、この値を使ったデフォルト率の推定も行ったが、株価データの取得時期により算出されるデフォルト率が非常に大きく変動することがあったことから、便宜的に$\mu_A = r$と仮定する。

ピアン・コール・オプションのプレミアムに等しいと仮定すると、実数A, tに対し、関数$C(A,t)$を

$$C(A,t) = A\Phi(x) - B_T \exp\{-r(T-t)\}\Phi(x - \sigma_A\sqrt{T-t}) \tag{2.10}$$

ただし、$x = \dfrac{\log(A/B_T) + (r + \sigma_A^2/2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}$

と定義したとき、時点tにおける資産価値E_tは

$$E_t = C(A_t, t) \tag{2.11}$$

と表せる。ただし、rは無リスクのスポット・レートで、一定値と仮定する。

関数Cの偏導関数を

$$C_A(A,t) = \frac{\partial}{\partial A}C(A,t) = \Phi(x)$$

$$C_{AA}(A,t) = \frac{\partial^2}{\partial A^2}C(A,t) = \frac{\phi(x)}{\sigma_A A\sqrt{T-t}} \tag{2.12}$$

$$C_t(A,t) = \frac{\partial}{\partial t}C(A,t) = -\frac{\sigma_A A\phi(x)}{2\sqrt{T-t}} - B_T r \exp\{-r(T-t)\}\Phi(x - \sigma_A\sqrt{T-t})$$

とおく。ただし、$\phi(x)$は標準正規分布の確率密度関数を表わす。

ここで、（2.1）式、（2.11）式に伊藤のレンマを適用すると、

$$dE_t = \left(C_A(A_t,t)\mu_A A_t + C_t(A_t,t) + \frac{1}{2}C_{AA}(A_t,t)\sigma_A^2 A_t^2\right)dt + C_A(A_t,t)\sigma_A A_t dW_t$$

$$= \left(\Phi(x)(\mu_A - r)A_t + rE_t\right)dt + \Phi(x)\sigma_A A_t dW_t \tag{2.13}$$

が得られる。

これと（2.8）式を比べると、

$$\sigma_E E_t = \Phi(x)\sigma_A A_t \tag{2.14}$$

が成り立つ。

ここでは先行研究に倣い[6]、$t=0$の値を利用して、

$$\sigma_E E_0 = \Phi(x)\sigma_A A_0 \tag{2.15}$$

をσ_Aについて解くことによって資産価値のボラティリティを求める。

２－２　既存研究について

本邦でのオプション･アプローチの既存研究は、このヨーロピアン･オプション･アプローチに基づいたものが主流となっている。

まず、ヨーロピアン･オプション･アプローチによるデフォルト率推定手法を詳しく解説したものとして、森平[1997]がある。そこでは、F.ブラックと M.ショールズが求めたオプション価格の解析解（ブラック･ショールズ式）[7]をそのまま用いるのではなく、不均衡オプション･モデル型の関係[8]を仮定する必要があるとしている。斎藤･森平[1998]でも、その方法に従い、1997 年秋に金融不安が発生した時の本邦金融機関の推定デフォルト率を算出し、その当時の市場の信用リスクに対する認識の大きさを示した。

また、黒子･神山[2000]では、ヨーロピアン･オプション･アプローチを用いたデフォルト率推定手法と財務指標を説明変数としたロジット･モデルを用いたデフォルト率推定手法により本邦企業の推定デフォルト率を算出し、それぞれの倒産判別力を比較している。この結果、ヨーロピアン･オプション･アプローチを用いた手法の方が倒産判別の精度は高いという結果を得ている[9]。

---

[6] 斎藤･森平[1998]や黒子･神山[2000]でも(2.15)式を採用しパラメータの算出を行っている。

[7] Black and Scholes[1973]参照。

[8] 「企業資産それ自身は市場で活発に取引されていない」ため、ブラック･ショールズ式を適用することは適当でないとして、ブラック･ショールズ式の無リスクのスポット･レートを資産価値の期待収益率で置き換えた Bonnes モデル（森平[1999～2000]）を利用した。

[9] ここでは、推定デフォルト率がある閾値以上の企業を「倒産企業」に分類し、この「倒産企業」が実際に倒産したか否かで倒産判別力を測る方法を採っている。これによると、「倒産企業」と判別された企業のうち実際に倒産した企業の比率はヨーロピアン･オプション･アプローチの方が高いため、推定精度もヨーロピアン･オプション･アプローチが高いと結論付けている。しかし、ヨーロピアン･オプション･アプローチでは、デフォルト企業を選択できずに非デフォルト企業としてしまう第 1 種エラー率が高いため、両者の手法を補完的に利用することにより推定精度を高められる可能性があるとしている。

３．ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定

３－１　何故ノックアウト･オプション･アプローチか

２章で示したヨーロピアン･オプション･アプローチでは、予め設定された時点Tに当該企業の資産価値が負債価値を下回る確率を求めていた。この場合、時点T以前の資産価値と負債価値との関係は明示的には考慮されなかった。

これに対し、本章で解説するノックアウト･オプション･アプローチでは、現時点$t=0$から時点Tまでの期間を通じて、資産価値が 1 回でも負債価値を下回ればデフォルトの発生とみなす。つまり、ノックアウト･オプション･アプローチでは、時点T以前の資産価値と負債価値との関係も考慮され、期間中のすべての時点でデフォルトか否かが判定されるような状況を想定する。

上場企業のような市場の目に晒されている企業の場合は、格付機関、企業アナリスト、銀行や取引先等は、決算発表で明らかになるような離散的な財務状況だけではなく、断続的なモニタリングによって、リアルタイムの財務状況も推定・把握していると仮定することが可能であると思われる。その仮定が実際に正しいとすると、デフォルトを引き起こすようなイベント（大幅な格下げ、アナリスト評価による先行き見通し悪化懸念、銀行による短期与信引上げ、取引先からの取引停止勧告など）はいつでも発生し得るとみなすことが出来る。このため、ヨーロピアン･オプション･アプローチで仮定されているように、デフォルトか否かが判定される時点を予め設定することは適当でないとの考え方も成り立ち得よう。

３－２　ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の基本的考え方

ノックアウト･オプション･アプローチでは、時点T以前のデフォルトも考慮する。

本節では、まず（1）でノックアウト･オプションとそのプライシングについて、ダウン･アンド･アウトのコール･オプションを例に説明し、（2）でノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率の推定手法を解説する。最後に（3）で、（2）に必要なパラメータの与え方を説明する。

（1）ノックアウト･オプションについて

時点$t\ (0 \le t \le T)$における原資産価格をS_tとおく。約定時（$t=0$とする）には、満期T、権利行使価格Kの他、ノックアウト値の水準mを決めておく[10]。ここで考察の対象となるダウン･アンド･アウトのノックアウト･コール･オプションでは、約定時から満期までの間に原資産価格がノックアウト値以下にならなかった場合には、満期時点の支払は通常のヨーロピアン･コール･オプションと同じである。しかし、原資産価格が満期までに一度でもノックアウト値を下回ると、元のオプション契約が無効になる。このようなオプションの満期時点での支払KO_Tは、

$$KO_T = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & (\min_{0 \le t \le T}(S_t) > m) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \qquad (3.1)$$

と表すことができる。

原資産価格が

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t \qquad (3.2)$$

で表される確率過程に従っている場合、ノックアウト･オプションの時点$t\ (0 \le t \le T)$での価格は、次のように表される。すなわち、実数S, tに対し確定的な関数$KO(S,t)$を

$$\begin{aligned} KO(S,t) &= S\Phi(x) - K\exp\{-r(T-t)\}\Phi(x - \sigma_S\sqrt{T-t}) \\ &\quad - S(S/m)^{-1-2r/\sigma_S^2}\Phi(y) \\ &\quad + K\exp\{-r(T-t)\}(S/m)^{1-2r/\sigma_S^2}\Phi(y - \sigma_S\sqrt{T-t}) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

ただし、$x = \dfrac{\log(S/K) + (r + \sigma_S^2/2)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}$

$$y = \frac{\log(m^2/SK) + (r + \sigma_S{}^2/2)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}$$

と定義すると、時点tにおけるノックアウト･オプションの価格KO_tは、

10　ここで考察の対象となるダウン･アンド･アウトのノックアウト･コール･オプションの場合、$m \le \min(S_0, K)$とするのが普通である。

$$KO_t = KO(S_t, t) \qquad (3.4)$$

と書くことができる[11]。

（2）ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率推定の定式化

ここでも、注目する企業の資産価値過程$\{A_t\}$が、

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t, \quad (0 \le t \le T) \qquad (3.5)$$

で表される確率過程に従っていると仮定する。また、現時点での資産価値A_0を既知とする。また、負債価値$\{B_t\}$を一定値

$$B_t \equiv B_0, \quad (0 \le t \le T) \qquad (3.6)$$

とおく。Tは、予め設定されたある将来時点である。

このような設定の下、ノックアウト･オプション･アプローチでは、デフォルトを、「時点Tまでの間に資産価値が負債価値以下に下落する事象」と定義する。負債価値を一定値B_0と仮定したので、デフォルト事象は、資産価値A_tの最小値を使って、「$\min_{0 \le t \le T} A_t \le B_0$」と表すことができる。ノックアウト･オプション･アプローチにおけるデフォルト確率EDPは、この事象が発生する確率

$$EDP = P(\min_{0 \le t \le T} A_t \le B_0) \qquad (3.7)$$

で定義される。ここではまず、デフォルトしない確率、すなわち「$\min_{0 \le t \le T} A_t > B_0$」となる確率を求める。

ブラウン運動に関して次のような表記を利用する。すなわち、定数μ，σ $(\sigma > 0)$とウィナー過程$\{W_t\}$に対し、確率過程$\{Z_t\}$の従う確率微分方程式が

$$dZ_t = \mu dt + \sigma dW_t \qquad (3.8)$$

で表されるとき、$\{Z_t\}$を$(\mu, \sigma^2)-$ブラウン運動と表記する。

確率過程$\{X_t\}$を$X_t \equiv \log A_t, (0 \le t \le T)$と定義すると、伊藤のレンマより、

[11] 証明は、例えば森村・木島[1991]参照。

$$dX_t = (\mu_A - \sigma_A^2/2)dt + \sigma_A dW_t \tag{3.9}$$

が成り立ち、上述の表現を利用すれば、$\{X_t\}$は$(\mu_A - \sigma_A^2/2, \sigma_A^2) -$ブラウン運動であることがわかる。

また、対数関数の単調性より、最小値に関して、

$$\min_{0\le t\le T} X_t = \log \min_{0\le t\le T} A_t \tag{3.10}$$

という関係がある。

このX_tを使って当該企業がデフォルトしないという事象を表すと、

$$\{\min_{0\le t\le T} X_t > \log B_0\} \tag{3.11}$$

である。

この事象に対する確率（すなわちデフォルトしない確率）は、

$$\begin{aligned}
&P(\min_{0\le t\le T} X_t > \log B_0) \\
&= \Phi\left(-\frac{\log B_0 - \log A_0 - (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \\
&\quad - \exp\left\{-\frac{2(\mu_A - \sigma_A^2/2)(\log A_0 - \log B_0)}{\sigma^2}\right\} \\
&\qquad \times \Phi\left(-\frac{\log B_0 + \log A_0 - (\mu_A - \sigma_A^2/2)T - 2\log B_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log(A_0/B_0) + (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \\
&\quad - (A_0/B_0)^{1-2\mu_A/\sigma_A^2}\,\Phi\left(-\frac{\log(A_0/B_0) - (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

と求めることができる[12]。

したがって、デフォルトする確率は、1から（3.12）式で求めたデフォルトしない確率を引いて、

[12] 補論を参照。

$$EDP = P(\min_{0 \le t \le T} X_t \le \log B_0)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\log(A_0 / B_0) + (\mu_A - \sigma_A^2 / 2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) + (A_0 / B_0)^{1-2\mu_A/\sigma_A^2} \Phi\left(-\frac{\log(A_0 / B_0) - (\mu_A - \sigma_A^2 / 2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \tag{3.13}$$

と求まる。

（3）ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率推定に必要なパラメータ

ヨーロピアン･オプション･アプローチと同様、ノックアウト･オプション･アプローチによりデフォルト率を求めるには、$A_0, B_0(= B_T), \mu_A, \sigma_A, T$ を与える必要がある。これらのうち、A_0, B_0, μ_A, T は、２－１（２）に述べた方法によって与える。

一方 σ_A は、ヨーロピアン･オプション･アプローチとノックアウト･オプション･アプローチでデフォルトの定義が違うことから、ここでの定義に合わせる形で以下のように求める。

２－１（２）と同様に、時点 T における発行済み株式全体の価値（株式時価総額）を考えるが、２－１（２）とはデフォルトの定義が違うことに注意が必要である。まず、時点 T 以前に資産価値が負債価値以下になった場合、当該企業はデフォルトとなり、時点 T での株式時価総額は 0 と考えられる。また、時点 T までの間に資産価値が負債価値以下にならなかった場合、株式時価総額は、資産価値から負債価値を引いた残りと仮定する。つまり、株価を $\{S_t\}$、株式時価総額を $\{E_t\}$（ただし、発行済み株式数を n として $E_t \equiv nS_t$）、負債価値を $B_t \equiv B_0$（一定値）とおくと、

$$E_T = \begin{cases} \max(A_T - B_0, 0) & (\min_{0 \le t \le T}(A_t) > B_0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{3.14}$$

が成立すると仮定する。これは、原資産を当該企業の資産、権利行使価格及びノックアウト値を B_0、満期を T とするダウン･アンド･アウトのノックアウト･コール･オプションのペイ･オフに等しい。

この点を根拠に、時点t $(0 \le t \le T)$における株式時価総額をダウン・アンド・アウトのノックアウト・コール・オプションのプレミアムに等しいと仮定すれば、実数A, tに対し確定的な関数$KO(A,t)$を、

$$
\begin{aligned}
KO(A,t) = {} & A\Phi(x) - B_0 \exp\{-r(T-t)\}\Phi(x - \sigma_A\sqrt{T-t}) \\
& - A(A/B_0)^{-1-2r/\sigma_A^2}\Phi(y) \\
& + B_0 \exp\{-r(T-t)\}(A/B_0)^{1-2r/\sigma_A^2}\Phi(y - \sigma_A\sqrt{T-t})
\end{aligned}
\quad (3.15)
$$

ただし、$x = \dfrac{\log(A/B_0) + (r + \sigma_A^2/2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}$

$$y = \frac{\log(B_0/A) + (r + \sigma_A^2/2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}$$

と定義すると、時点tにおける株式時価総額は、

$$E_t = KO(A_t, t) \quad (3.16)$$

と表せる。

ここで、関数$KO(A,t)$の偏導関数を

$$
\begin{aligned}
KO_A(A,t) &= \frac{\partial}{\partial A}KO(A,t) \\
&= \Phi(x) + (2r/\sigma_A^2)(A/B_0)^{-(1+2r/\sigma_A^2)}\Phi(y) \\
&\quad + (1-2r/\sigma_A^2)\exp\{-r(T-t)\}(A/B_0)^{-2r/\sigma_A^2}\Phi(y-\sigma_A\sqrt{T-t})
\end{aligned}
$$

$$KO_{AA}(A,t) = \frac{\partial^2}{\partial A^2}KO(A,t) \quad (3.17)$$

$$KO_t(A,t) = \frac{\partial}{\partial t}KO(A,t)$$

とおくと[13]、伊藤のレンマよりE_tが従う確率微分方程式は、

$$
\begin{aligned}
dE_t = {} & (KO_A(A_t,t)A_t\mu_A + KO_t(A_t,t) + \frac{1}{2}KO_{AA}(A_t,t)\sigma_A^2 A_t^2)dt \\
& + KO_A(A_t,t)\sigma_A A_t dW_t
\end{aligned}
\quad (3.18)
$$

---

[13] （3.20）式のσ_E, σ_Aの関係を求めるにはKO_Aが明示的に与えられていれば十分である。

で与えられる。これと、

$$dE_t = \mu_E E_t dt + \sigma_E E_t dW_t \tag{3.19}$$

の拡散係数を比較して、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_E E_t = (&\Phi(x) + (2r/\sigma_A^2)(A_t/B_0)^{-(1+2r/\sigma_A^2)}\Phi(y) \\ &+ (1-2r/\sigma_A^2)\exp\{-r(T-t)\}(A_t/B_0)^{-2r/\sigma_A^2}\Phi(y-\sigma_A\sqrt{T-t}))\sigma_A A_t\end{aligned} \tag{3.20}$$

ここでは、２章と同様に $t=0$ の値を使って、資産価値のボラティリティは、

$$\begin{aligned}\sigma_E E_0 = (&\Phi(x) + (2r/\sigma_A^2)(A_0/B_0)^{-(1+2r/\sigma_A^2)}\Phi(y) \\ &+ (1-2r/\sigma_A^2)\exp\{-rT\}(A_0/B_0)^{-2r/\sigma_A^2}\Phi(y-\sigma_A\sqrt{T}))\sigma_A A_0\end{aligned} \tag{3.21}$$

を σ_A について解くことによって求める。

４．実証分析

本章では、オプション･アプローチによるデフォルト率推定の実証分析を行う。

まず、４－１では、ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチそれぞれにより推定されたデフォルト率を比較し、両者の関係を考察する。また、リスク計測期間を変えた場合についても実証する。さらに格付機関の格付とオプション･アプローチにより算出されたデフォルト率とを比較して、両者の関係を考察する。続いて４－２では、1997 年以降にデフォルトした企業について、オプション･アプローチを用いて事前の推定デフォルト率を過去に遡って算出し、推定デフォルト率がどの程度デフォルトを事前に予測していたかを見る。オプション･アプローチの有効性をさらに探るため、デフォルト企業の中で 2000 年にデフォルトした企業について、同業種・同規模でデフォルトしていない企業との過去のデフォルト率推移の比較も行う。

４－１　ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチとから計算されるデフォルト率の比較

ここでは、ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチの双方を用いてデフォルト率を計算し、比較を行う。

（1）利用データ

利用したデータは次の通りである[14]。

計算時点	2000 年 10 月末
対象企業	東証 1 部上場企業全銘柄のうち、株価ボラティリティが算出可能であった企業 1,417 社[15]
財務指標	直近の単体本決算[16]
無リスクのスポットレート	1 年物日本国債ジェネリック金利[17]より算出
格付	日本格付投資情報センター（R&I）の格付
株価ボラティリティ	株価（終値）の 3 ヶ月間の（日次）対数収益率を年率換算

（2）デフォルト率の比較

実証を行う前に、ヨーロピアン･オプション･アプローチとノックアウト･オプション･アプローチで推定されるデフォルト率の関係を考察する。具体的には、企業の資産負債構造B_0/A_0と、株価ボラティリティσ_Eを外生的に与え、両オプション･アプローチでデフォルト率を算出する。

ここで、企業の資産負債構造B_0/A_0を 3 通り（60%、80%、99%）設定し、リスク評価期間を１年とした上で、株価ボラティリティσ_Eを外生的に動かすことによってヨーロピアン･オプション･アプローチとノックアウト･オプション･アプローチの推定デフォルト率の関係をプロットした（図表 1）。

14　データは Bloomberg 社から入手。

15　ボラティリティ計算に必要な株価データを取得できないものは、対象外とした。

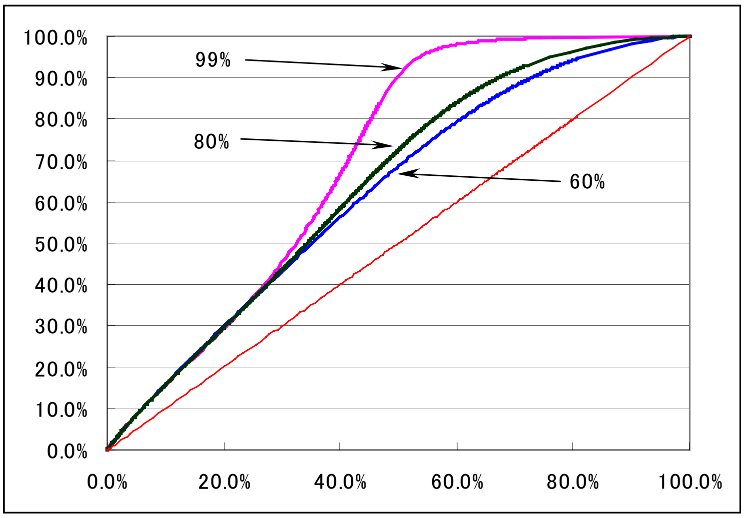
16 2000 年 10 月末時点で 2000 年決算発表済みの企業では 2000 年決算を利用。未発表の企業では 1999 年決算を利用することとした。

17 Bloomberg 社が算出している 1 年物国債金利。

【図表 1】両オプション･アプローチで推定されたデフォルト率の比較（試算）

――――横軸：ヨーロピアン･オプション･アプローチ

縦軸：ノックアウト･オプション･アプローチ

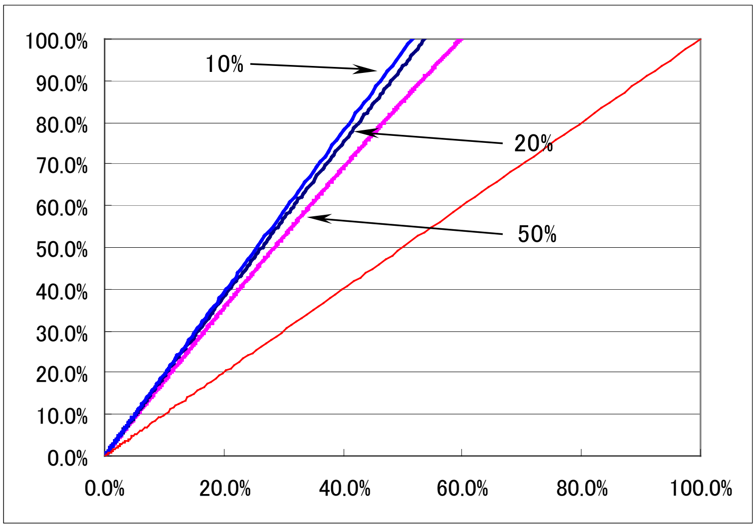


ノックアウトの方がヨーロピアンよりも大きい値となることは、2 章、3 章で解説した理論から自然に予想されることであるが、これが図表 1 からも確認できる。

また、ノックアウト･オプション･アプローチで算出されたデフォルト率が 30%程度以下であれば、ノックアウト･オプション･アプローチで算出されるデフォルト率とヨーロピアン･オプション･アプローチで算出されるデフォルト率の比率は企業の資産･負債構造への依存度が低い。しかし、ノックアウト･オプション･アプローチのデフォルト率が 30%程度を超えるような水準では、この比率は企業の資産･負債構造によって大きく変化する（負債が大きいほどヨーロピアン･オプション･アプローチのデフォルト率に比べノックアウト･オプション･アプローチのデフォルト率が相対的に大きくなる）ことが分かる。

次に資産価値ボラティリティ σ_A を 3 通り（10%、20%、50%）設定し、企業の資産負債構造 B_0/A_0 を外生的に動かすことによってヨーロピアン･オプション･アプローチとノックアウト･オプション･アプローチの推定デフォルト率の関係をプロットした（図表 2）。なお、リスク評価期間は同様に 1 年とした。

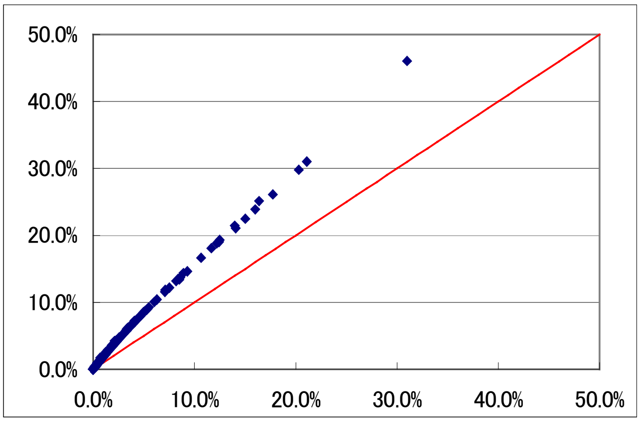
【図表 2】両オプション･アプローチで推定されたデフォルト率の比較（試算）
————横軸：ヨーロピアン･オプション･アプローチ
縦軸：ノックアウト･オプション･アプローチ



図表 2 を見ると、ノックアウト･オプション･アプローチで算出されたデフォルト率が 30%程度以下であれば、両アプローチで算出されるデフォルト率の比率は、σ_A の値にさほど依存しない。σ_A を有限の値で固定するとき、ヨーロピアン･オプション･アプローチで算出したデフォルト率に上限が存在することが(2.5)式から予想されるが、図表 2 からもこのことが確認できる（例えば σ_A が 50%の場合、デフォルト率は 60%弱が上限となっている）。

次に、（1）で示した対象企業の実際のデータを用いて、ヨーロピアン･オプション･アプローチで算出したデフォルト率とノックアウト･オプション･アプローチで算出したデフォルト率を、リスク計測期間 T を 1 年として比較する（図表 3、図表 4）。1 つの点が 1 つの企業を表す。例えば図表 3 で最右上に位置する点では、この点に対応する企業のデフォルト率が、ヨーロピアン･オプション･アプローチで算出すると 30%程度、ノックアウト･オプション･アプローチで算出すると 45%程度であることを示している。

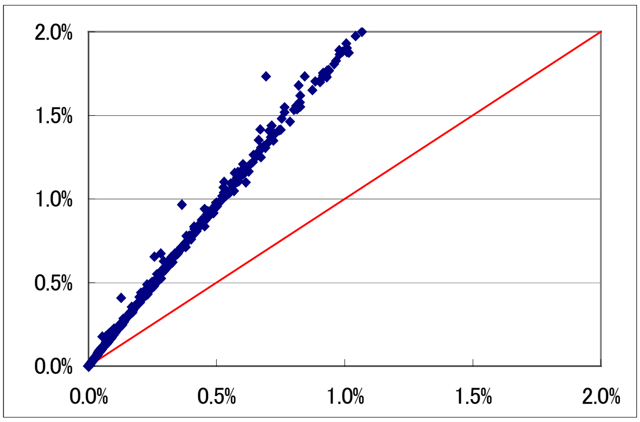
【図表 3】両オプション･アプローチで推定されたデフォルト率の
比較（実際のデータを利用）
————横軸：ヨーロピアン･オプション･アプローチ
縦軸：ノックアウト･オプション･アプローチ



図表 3 より、算出されたデフォルト率を比較すると、大まかに見てヨーロピアン･オプション･アプローチのデフォルト率が 10%程度を超える水準では、ノックアウト･オプション･アプローチがヨーロピアン･オプション･アプローチの 1.5 倍程度になっていることがわかる。また、この図表を見る限り、ノックアウト･オプション･アプローチで算出したデフォルト率とヨーロピアンで算出したデフォルト率の間に、安定した関係が存在していることがわかる。

次に、図表 4 は、図表 3 のデフォルト率 2%以下の部分を拡大したものである。

【図表 4】図表 3 の拡大図
————横軸：ヨーロピアン･オプション･アプローチ
縦軸：ノックアウト･オプション･アプローチ



これを見ると、プロットしたデータ群の傾き（2 倍程度）が図表 3 より急になっており、デフォルト率の水準が低い部分では、ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチの比が、より大きいことがわかる。

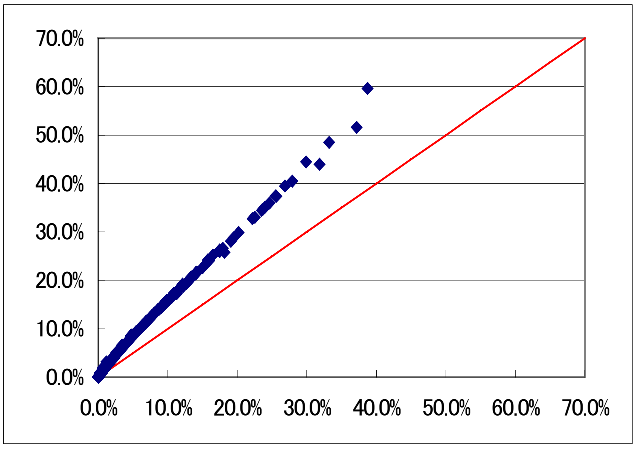
次にリスク計測期間Tを 2 年としてノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチの比較を行う（図表 5）。

【図表 5】両オプション･アプローチで推定されたデフォルト率の比較

（リスク計測期間 2 年）

――――横軸：ヨーロピアン･オプション･アプローチ

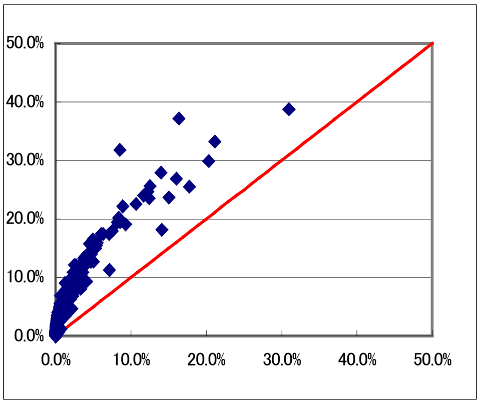
縦軸：ノックアウト･オプション･アプローチ

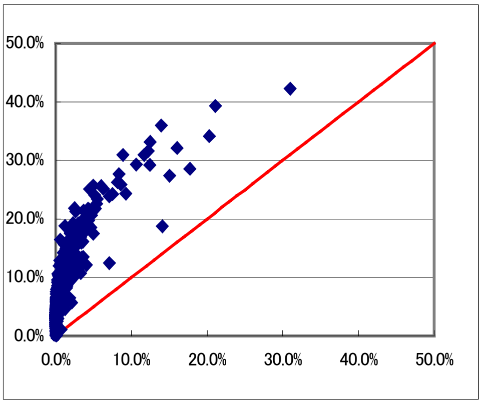


ここでは、リスク計測期間を長くしたことによって、図表 3 よりも高いデフォルト率が得られた。ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチのデフォルト率は、図表 3 と同様、比例関係に近い関係が見られ、傾きも同程度である。

ノックアウト･オプション･アプローチで、リスク計測期間Tによってデフォルト率がどのように変化するか見るために、$T=1$年と$T=2$年、$T=3$年を比較した（図表 6）。

【図表 6】ノックアウト･オプション･アプローチで推定された
デフォルト率のリスク計測期間Tによる比較
――――左図　横軸：$T=1$ 年、縦軸：$T=2$ 年
右図　横軸：$T=1$ 年、縦軸：$T=3$ 年





Tが大きいほどデフォルト率が大きくなる傾向は見られるものの、どれだけ大きくなるかにはかなりのばらつきがある。また、リスク評価期間によってデフォルト率に逆転[18]が発生している例が多数見られ、ノックアウト･オプション･アプローチによるデフォルト率の評価は、リスク評価期間の影響を受けやすいこともわかる[19]。

（３）算出されたデフォルト率と格付との関係

次に、本稿で推定したデフォルト率（$T=1$年）と、格付機関（R&I）が付与している格付[20]との関係を見る。本稿で推定されたデフォルト率も、格付機関が

[18] 2 つの企業 A と B の、$T=1$年及び$T=2$年のデフォルト率をそれぞれ$D_A^1, D_A^2, D_B^1, D_B^2$とおいたとき$(D_A^1 - D_B^1)(D_A^2 - D_B^2) < 0$が成立していること。図表 6 では、ある点から見て、左上あるいは右下に他の点が存在すれば逆転が起きていることがわかる。$T=3$年も同様。

[19] 資産価値は期待収益率μ_A、ボラティリティσ_Aの幾何ブラウン運動に従うと仮定されている。μ_Aを共通としたので、Tを変化させた時のデフォルト率の変化は、σ_Aに大きく影響されると考えられる。したがって、σ_Aの相違により、デフォルト率に逆転が生じた可能性がある。

[20] R&I は、BB、B にも“＋”、“－”のノッチをつけているが、これらに含まれる企業数が少ないため、本稿の分析では BB+、BB、BB-をまとめて BB とし、B+、B、B-をまとめて B とした。

付与する格付も、企業の信用力を表す指標であると考えられるが、両者がどの程度整合的であるかを考察する[21]。

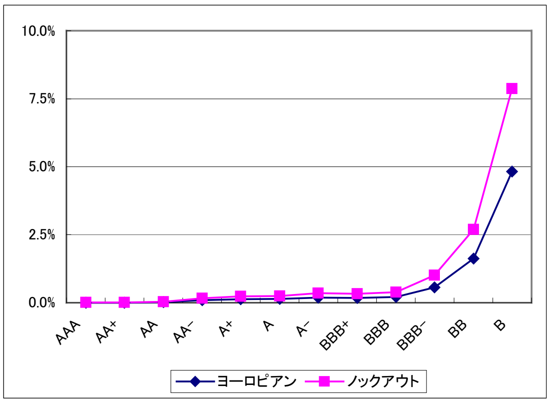
まず、格付毎に、ヨーロピアン、ノックアウト･オプション･アプローチそれぞれで推定されたデフォルト率の平均及び標準偏差を求めた（図表 7、図表 8）。

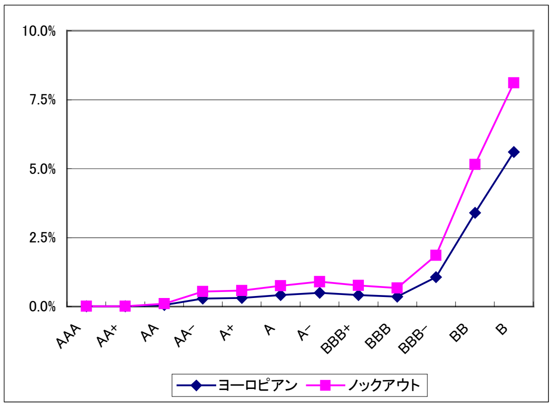
【図表 7】格付と両オプション･アプローチにより推定されたデフォルト率の算出結果の比較

格付	社数	ヨーロピアン		ノックアウト	
		平均(a)	標準偏差	平均(b)	標準偏差
AAA	15	0.003%	0.004%	0.006%	0.009%
AA+	13	0.003%	0.006%	0.006%	0.012%
AA	18	0.015%	0.053%	0.029%	0.101%
AA-	25	0.083%	0.288%	0.164%	0.538%
A+	44	0.125%	0.314%	0.233%	0.577%
A	57	0.131%	0.415%	0.247%	0.757%
A-	68	0.187%	0.495%	0.347%	0.895%
BBB+	48	0.173%	0.419%	0.325%	0.760%
BBB	53	0.200%	0.359%	0.381%	0.674%
BBB-	34	0.559%	1.063%	1.014%	1.860%
BB	31	1.623%	3.393%	2.693%	5.157%
B	8	4.820%	5.607%	7.881%	8.106%

デフォルト率比較	
差((b)-(a))	比率((b)/(a))
0.003%	1.994
0.003%	1.997
0.014%	1.916
0.080%	1.962
0.108%	1.866
0.116%	1.883
0.160%	1.853
0.152%	1.881
0.181%	1.906
0.455%	1.814
1.070%	1.659
3.061%	1.635

【図表 8】同グラフ（左図：平均、右図：標準偏差）





この中で推定デフォルト率の格付毎の平均を見ると、ヨーロピアン、ノックアウト･オプション･アプローチとも平均で見ると格付と概ね整合的である（す

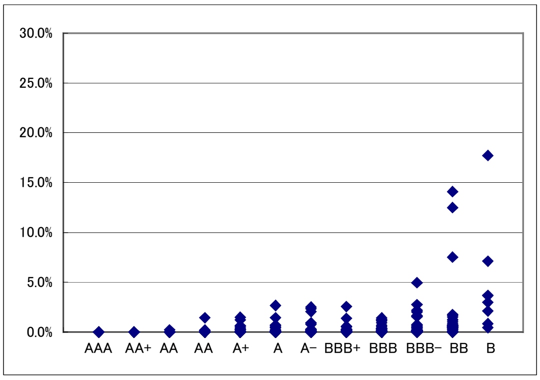
[21] 過去のデフォルト実績から格付毎のデフォルト率を推定し、これとオプション･アプローチによるデフォルト率を比較することも理論上は可能であるが、格付を付与された企業のデフォルト事例が少なく、格付毎のデフォルト率の推定は困難である。R&I では、デフォルトの定義に債権放棄等を含めた格付毎の「広義デフォルト率」を算出しているが、サンプル数が少ないため算出値が安定性に欠ける面は否めないとの指摘もある（石渡[2000]）。

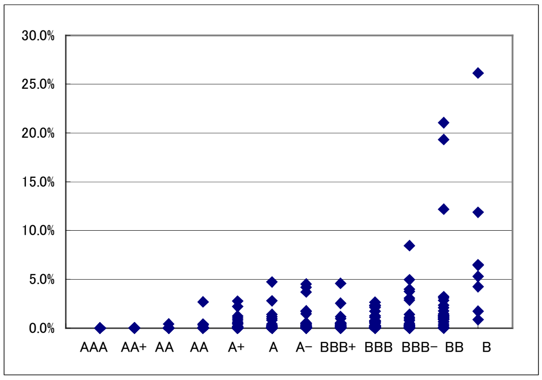
なわち、A-と BBB+での逆転以外は、低格付ほど高いデフォルト率が推定されている）。ただし、低格付の部分では標準偏差が大きく、個社別に見るとデフォルト率が平均値の周りにかなり分散していることがわかる。これを詳しく見るために、格付別のデフォルト率散布図を作成した（図表 9）。

【図表 9】格付別のデフォルト率散布図

――――左図：ヨーロピアン･オプション･アプローチ

右図：ノックアウト･オプション･アプローチ



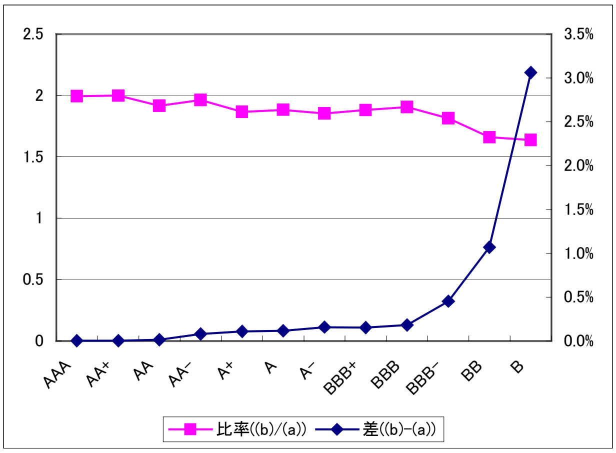


BBB 格企業の最高デフォルト率が､ノックアウト･オプション･アプローチでも BBB+格のそれをかなり下回っている点には違和感があるが､それ以外の部分では、格付毎に推定されたデフォルト率は、ヨーロピアン、ノックアウト･オプション･アプローチともに必ずしも平均付近に集中している訳ではなく、特に低格付の場合にかなり分散していることが確認できる。

また、オプション･アプローチにより推定されたデフォルト率が高い企業は概ね低格付を付与されているが、低格付の企業でも推定されたデフォルト率が低くなる例も少なくないため、推定されたデフォルト率が比較的低い企業にどの格付が付与されるのか、定量的にはっきりと結論づけることはできないことも読み取れる。

次に、格付毎のデフォルト率の、ヨーロピアン･オプション･アプローチとノックアウト･オプション･アプローチの違いを見るために、図表 7 のデフォルト率比較の数値をグラフ化した。

【図表 10】図表 7 のグラフ化（デフォルト率平均の差及び比率）



デフォルト率の平均の差は、低格付ほど大きくなっているが、これは低格付ほどデフォルト率の絶対水準自体が高いことによるものと思われる。一方、比率は、概ね 1.5～2.0 程度と、図表 3、4 と同様の結果となった。

以上より、オプション･アプローチによって推定されたデフォルト率は、格付毎の平均値で見ると低格付企業が高格付企業対比大きくなるという点で、格付とは概ね整合的な関係があることが分かった。しかし、特に低格付企業のデフォルト率の分散が大きいため、個別に見ると、格付機関から低格付を付与された企業であっても、オプション･アプローチで推定されたデフォルト率が高格付を付与された企業の平均値より低い場合も多く、両者の関係は必ずしも整合的ではないとの指摘も可能である。

４－２　デフォルト企業のデフォルト率推移

本節では、1997 年 4 月以降にデフォルトした東証 1 部上場企業[22]について、デフォルト時点以前に溯ってデフォルト率を推定して、その推移を見る。また、2000 年中にデフォルトした企業では、同業種・同資産規模のデフォルトしていない企業のデフォルト率も推定し、比較を試みる。

ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプロー

22 このうち、ヤオハンジャパン及び三洋証券は、対象期間中のデフォルト企業であるが、必要な財務情報が得られなかったため対象から外した。日貿信は、形式上のデフォルトは 2000 年の民事再生法申請に伴って発生したが、実際には 1998 年の決算から債務超過であったことから、分析の対象から除外した。

チによって算出されたデフォルト率は、４－１の結果からも分かるように、水準にこそ差はあるが、時系列での変動の仕方は殆どパラレルとなる。このため、本節では両者の水準比較は行わず、オプション･アプローチの有効性に焦点を当てて分析を行う。

なお、財務指標[23]、無リスクのスポット･レート、株価ボラティリティは４－１（１）で説明したものと同様のデータを利用した。

（１）1997 年 4 月以降のデフォルト企業

図表 11 に 1997 年 4 月以降にデフォルトした東証 1 部上場企業のうち分析対象とする企業を列挙した[24]。1997 年後半から 1998 年末までに上場企業のデフォルトが頻発し、その後 1 年以上おいて 2000 年 2 月から幾つかのデフォルトが発生していることがわかる。

【図表 11】東証 1 部上場企業デフォルト企業（1997 年 4 月以降）

1997年度～1998年度

会社名	業種	年月
東海興業	建設業	1997年7月
多田建設	建設業	1997年7月
大都工業	建設業	1997年8月
東食	食品商社	1997年12月
大同コンクリート工業	コンクリート製品製造	1998年2月
淺川組	建設業	1998年7月
大倉商事	鉄鋼・機械商社	1998年8月
ヤハギ	鉄鋼商社等	1998年9月
日本国土開発	建設業	1998年12月

1999年度以降

会社名	業種	年月
長崎屋	総合スーパー	2000年2月
エルカクエイ	分譲住宅開発	2000年2月
ライフ	信販・クレジット業	2000年5月
第一ホテル	ホテル	2000年5月
そごう	百貨店	2000年7月
藤井	アパレル販売	2000年9月

（２）1997 年、1998 年におけるデフォルト企業のデフォルト率推移

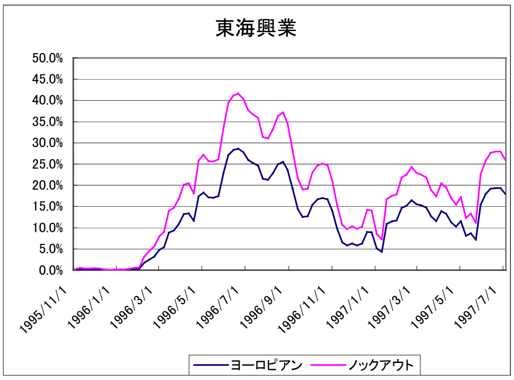
1997 年 4 月～1998 年末までにデフォルトした 9 社について、デフォルトの 2 年前からデフォルト直前までのデフォルト率（週次）の推移を図表 12 に示す[25]。

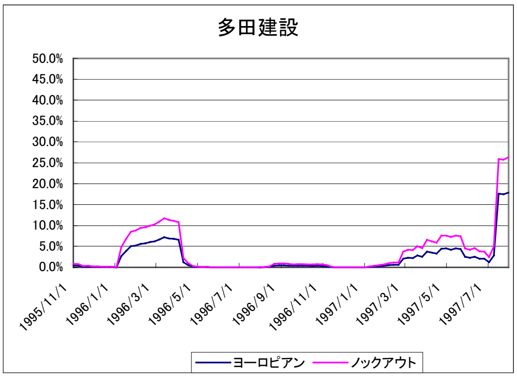
[23] ここでは、決算時点から決算発表まで 2 ヶ月の間隔があると考えた。例えば、3 月決算では 2 ヶ月後の 6/1 日から当該決算情報を利用出来ると仮定した。

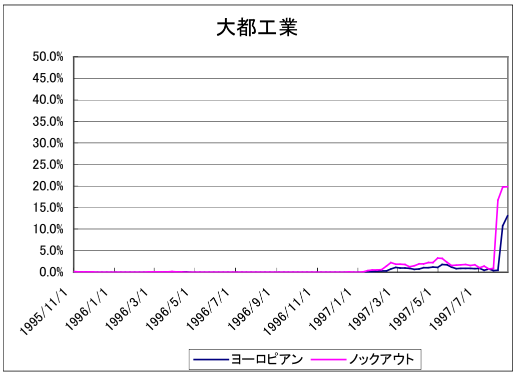
[24] ヤオハンジャパン、三洋証券、日貿信は分析の対象外とした（脚注 22 参照）。

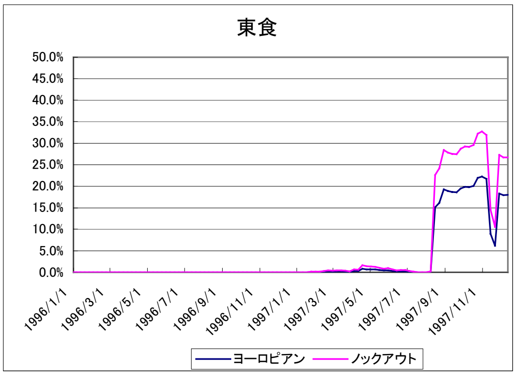
[25] ただし、データの制約から 1995 年 11 月以前のデフォルト率は算出していない。また、グラフの縦軸の最大値は、ヤハギを 80%とした以外は 50%とした。

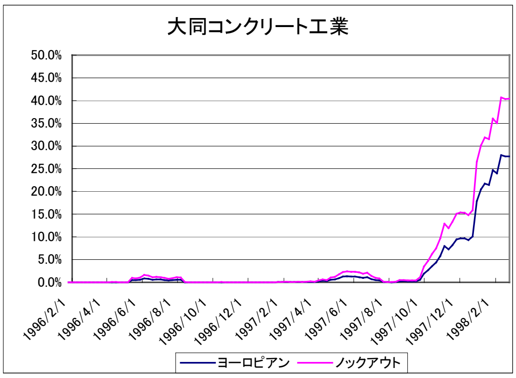
【図表 12】1997 年、1998 年のデフォルト企業のデフォルト率推移

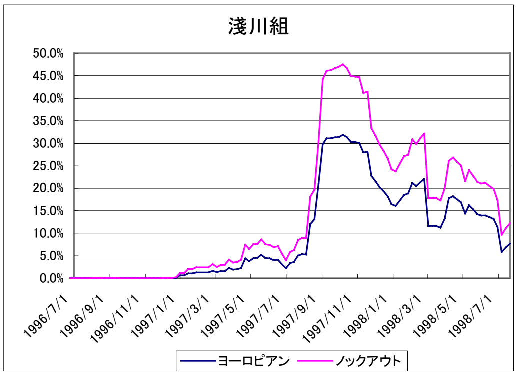


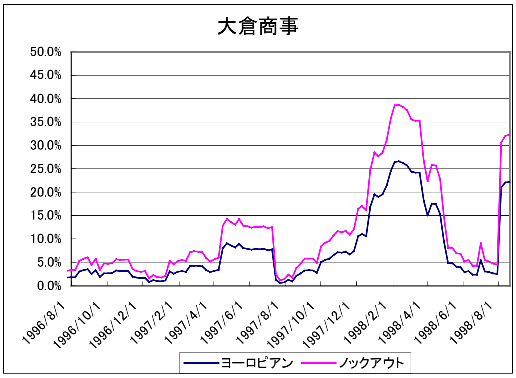


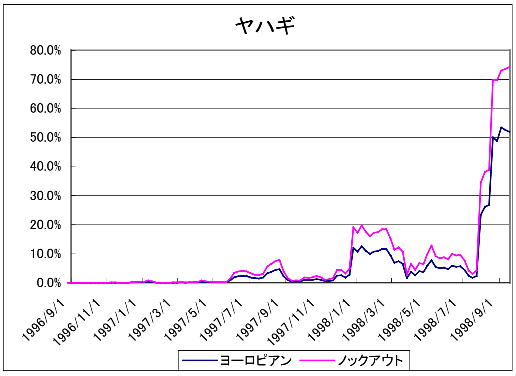


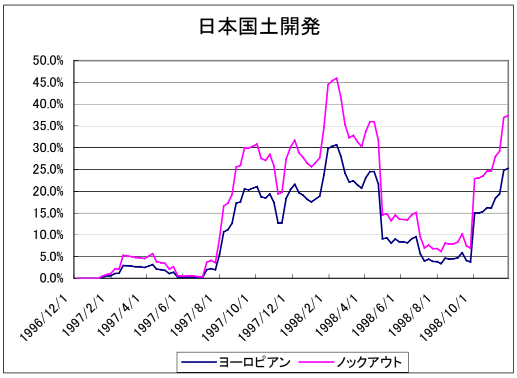












1997年度にデフォルトした5社（東海興業、多田建設、大都工業、東食、大同コンクリート工業）では、東海興業を除き、デフォルトの数ヶ月前までデフォルト率の上昇が見られない。これらは1997年後半にたて続けにデフォルトしたが、それまで上場企業のデフォルトが希であったため、株式市場がデフォルトリスクの上昇を直前まで反映していなかった可能性があると考えられる[26]。

一方、1998年度にデフォルトした4社（淺川組、大倉商事、ヤハギ、日本国土開発）では、デフォルトの1年近く前からデフォルト率の上昇が見られる。特に建設業者2社（淺川組、日本国土開発）では、1997年8月頃からデフォルト率が上昇し、実際にデフォルトするまで高い値が続いた。これは、1997年7月、8月に上述の建設業者3社（東海興業、多田建設、大都工業）が相次いでデフォルトしたことから、これら同業2社も市場でデフォルトリスクを高目に評価されたという解釈が可能であると考えられる。

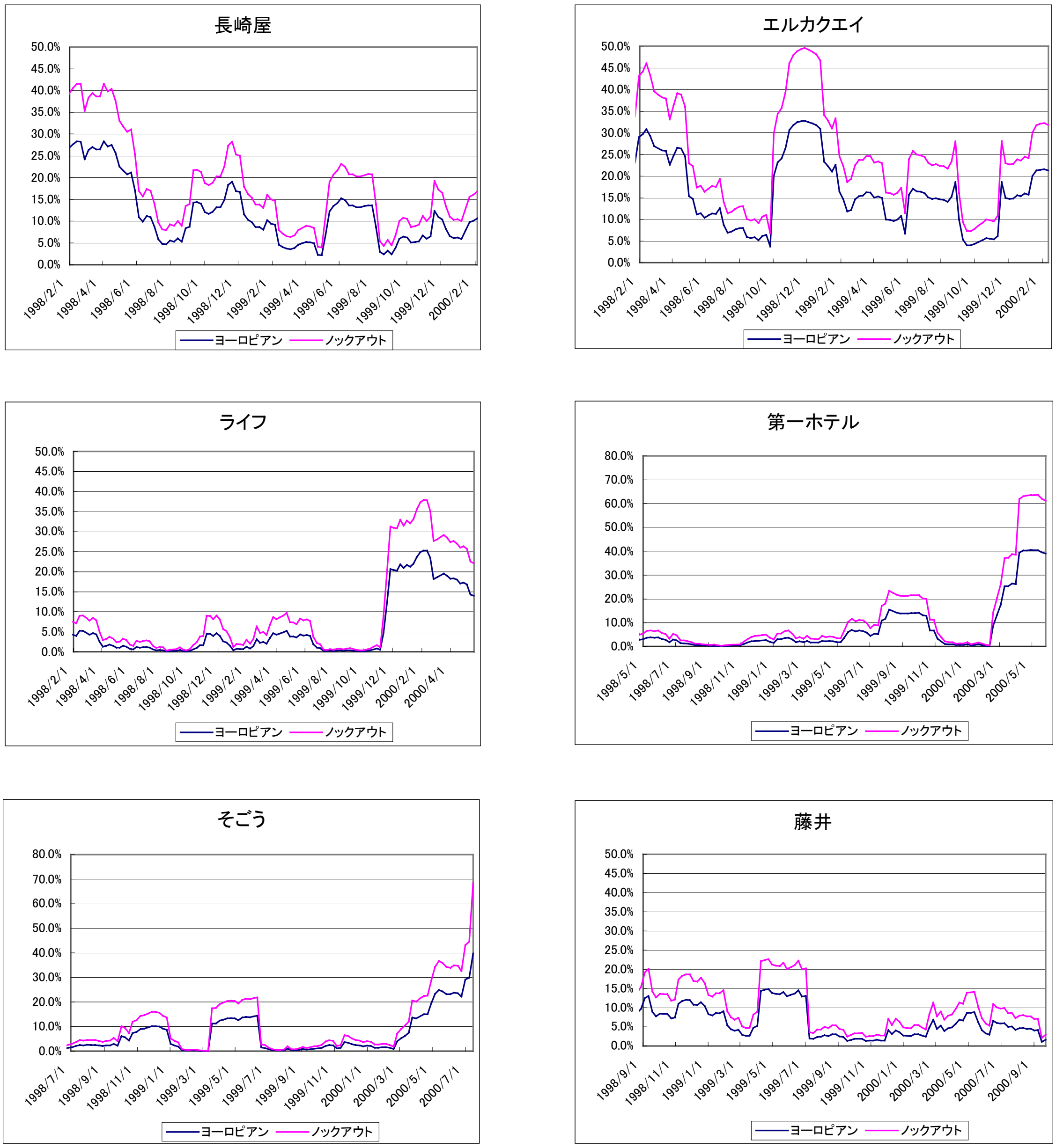
（3）2000年におけるデフォルト企業のデフォルト率推移

2000年にデフォルトした企業6社のデフォルト率推移を示す[27]（図表13）。

[26] 東証1部上場全企業について、1997年6月時点と1998年6月時点で、ノックアウト・オプション･アプローチを用いてデフォルト率を算出し、平均をとって比較を行った。そうすると、1998年6月時点の方が約5倍もの大きさとなっていた（1997年6月:0.66%、1998年6月:3.05%）。

[27] グラフの縦軸の最大値は、第一ホテルとそごうを80%とした以外は50%とした。

【図表 13】2000 年のデフォルト企業のデフォルト率推移



2000 年中にデフォルトした企業のうち、ライフ、第一ホテルのデフォルト率は、数ヶ月前になってから高い値を示すようになった。その他の 4 社のデフォルト率は、デフォルトより 1 年以上も前に、ノックアウト･オプション･アプローチで 20%を超えているなど、かなり以前よりデフォルト率が上昇していた。これは 1997 年以降に上場企業のデフォルトが相次いだことによって、金融市場が信用リスクにより敏感に反応するようになったことの現われである可能性が

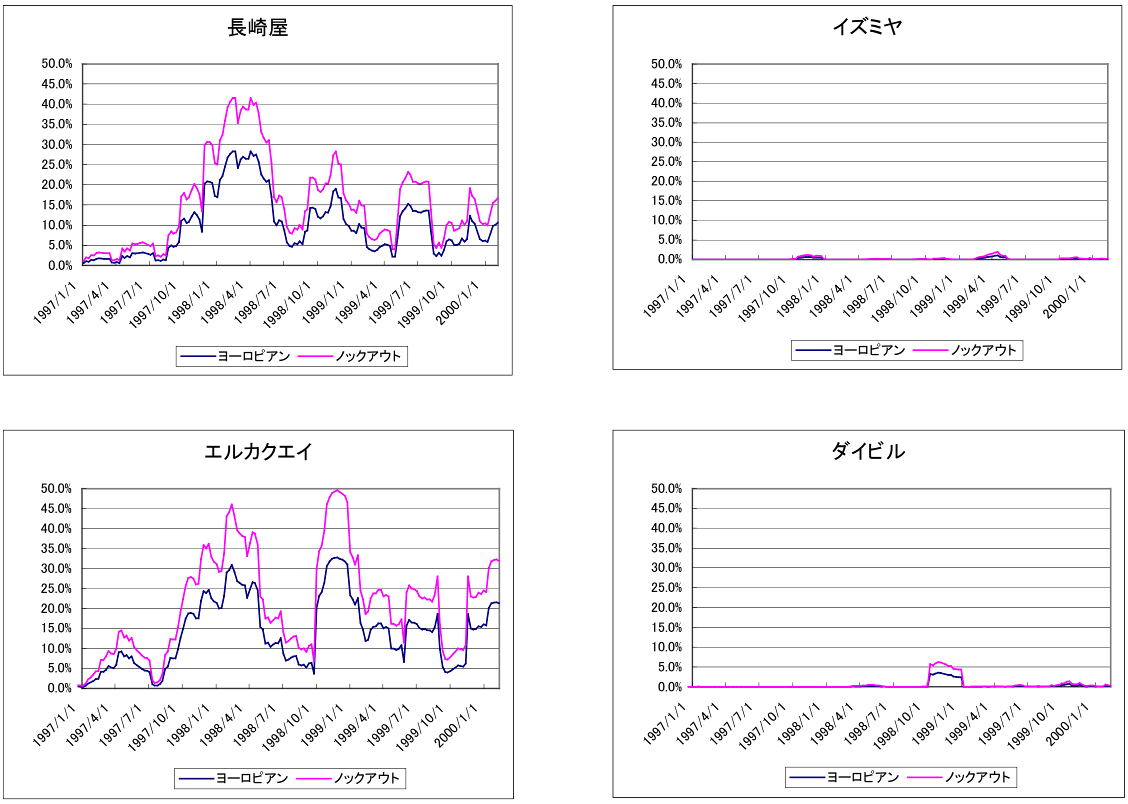
ある[28]。

（4）デフォルト企業と非デフォルト企業とのデフォルト率の比較

2000 年以降にデフォルトした 6 社と、同業種･同資産規模でデフォルトしなかった企業[29]のデフォルト率の推移を比較する。デフォルト企業と非デフォルト企業それぞれのデフォルト率を、デフォルト企業のデフォルト時点から過去 3 年程度に亙って週次で算出した（図表 14）。

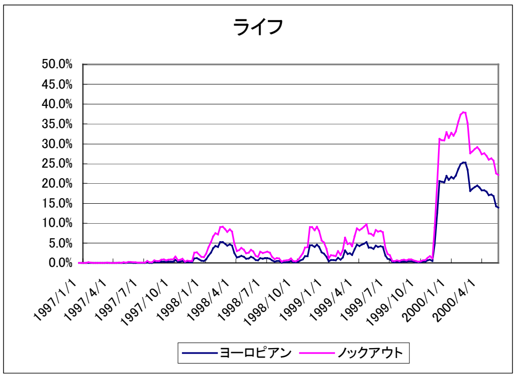
【図表 14】同業種、同資産規模の企業でのデフォルト率推移比較

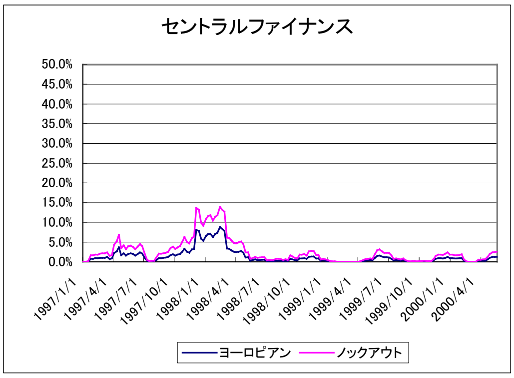
――――左：デフォルト企業、右：非デフォルト企業

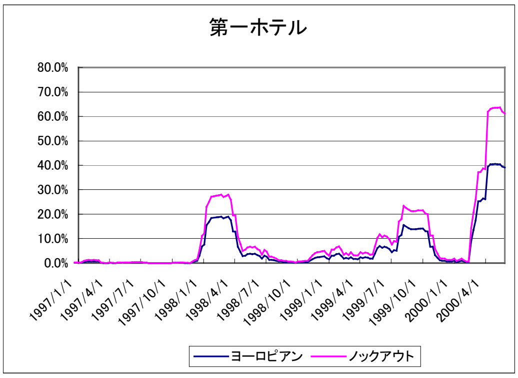


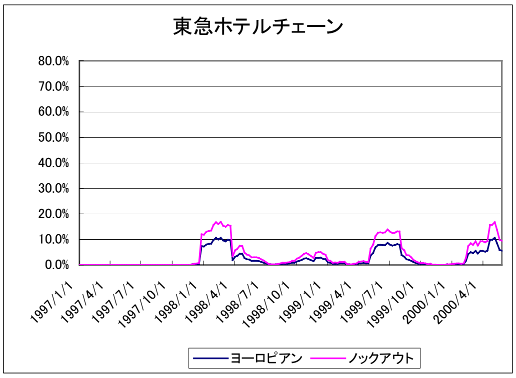
[28] これは、1997 年には上場企業で 10 社のデフォルトが発生したことが影響していると考えられる（なお、1995 年は 2 社、1996 年は 1 社）。実際、図表 13 の期間中デフォルト率が高めに推移していた長崎屋、エルカクエイ、そごう、藤井についてさらに溯ってデフォルト率を算出すると、1997 年後半までのデフォルト率は高くなかった（図表 14 参照）。

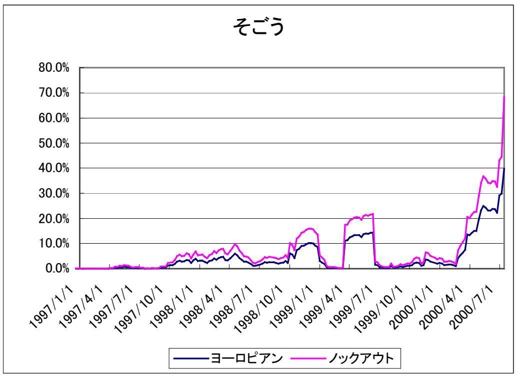
[29] デフォルトした企業の直近の決算と同期の決算で総資産額が最も近い、同業種の企業を選択した。なお、藤井には該当する適当な企業がなかったため、分析対象から除外した。

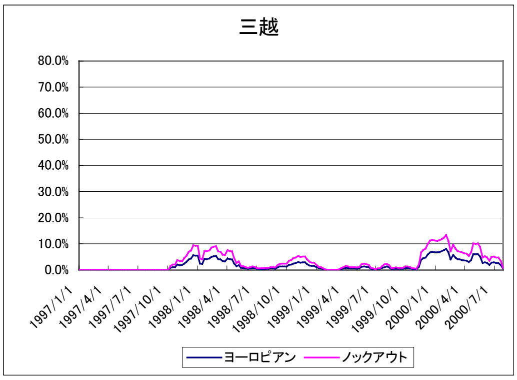












これらを見ると、デフォルト時点よりかなり前からデフォルト企業の方が非デフォルト企業より高いデフォルト率を示す傾向があることがわかる。このことは、デフォルト企業と非デフォルト企業の判別がデフォルト以前にできる可能性を示していると考えられる。

また、ノックアウト･オプション･アプローチでは、デフォルト時点までの 1 年間を見ると、全ての企業で 1 度は 20%を超える水準に達している。この点は、デフォルトを予測する際に、1 つの参考情報となり得る可能性がある。

４－３　実証分析のまとめ

４－１では、ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチにより算出されたデフォルト率の比較から、両者には図表 3、図表 4 のような安定した関係が見て取れた。また、４－２ではデフォルト企業と非デフォルト企業について、両オプション･アプローチで過去のデフォルト率推移を見たが、ノックアウト･オプション･アプローチとヨーロピアン･オプション･アプローチでは、ノックアウト･オプション･アプローチの方の値が予想通り大きくなった一方で、時系列での変動の仕方は殆どパラレルとなった。

以上の結果から、両オプション･アプローチで算出されたデフォルト率は、信用度の時系列的な変化の方向性や企業間の比較などデフォルト率の相対比較を行う場合はどちらを使用しても実務上は有効であると判断できる[30]。

５．オプション･アプローチの理論上の問題点とそれを回避するための新たな方法

５－１ オプション･アプローチの理論上の問題点

本稿で示した実証結果から、オプション･アプローチによるデフォルト率推定手法は、実務上はある程度有効であると判断出来た。しかし、本稿で示したオプション･アプローチは理論上の問題点を内包している。以下では、ヨーロピアン･オプション･アプローチを例にその問題点を説明する。

その問題点とは、パラメータσ_Aとσ_Eを、ヨーロピアン･オプション･アプローチの定式化における(2.15)式を利用して、同時に定数と表したことである。(2.14)式に基づけば、本来は、σ_Aとσ_Eは同時には定数になり得ないことがわかる。σ_A, σ_Eの両方が定数になり得ないことの背景には、

① (2.1)式が成立する。すなわち、$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t$、

[30] オプション･アプローチによるデフォルト率と当該企業の株価水準を比較したところ、両者には比較的高い相関関係が見られた。このため、企業の信用度を見るためには、株価のみを見ればよいのではないかとの議論も可能であると考えられる。しかし、例えば、株価水準が低くても安定していればデフォルト率が低くなる場合や、逆に株価水準が高くてもボラティリティが大きければデフォルト率が高くなる場合もある。したがって、株価水準のみでは企業の信用度を必ずしも捉え切れないとの推論も可能であろう。本稿では、この議論にはこれ以上立ち入らず、今後の検討課題とする。

② (2.8)式が成立する。すなわち、$dE_t = \mu_E E_t dt + \sigma_E E_t dW_t$、

③ 資産価値と株式時価総額の差が一定値（=負債価値）。すなわち、$A_t - nS_t = B_0\ (0 \le t \le T)$、

④ (2.11)式が成立する。すなわち、$E_t = C(A_t, t)$、

という 4 つの仮定が同時には成立し得ないという事情がある。

５－２ 問題点回避のための新たな方法

この問題点を回避するためには、これまで解説してきたオプション･アプローチの枠組みを変更する必要がある。新たな方法を詳細に検討することは今後の研究課題とするが、ここでは、現在検討中の方法のコンセプトを示すこととしたい。

具体的には、５－１で示した②と④の仮定をおかず、①と③の仮定から直接σ_Aを推定するという方法が考えられる。

すなわち、③より、$A_t = B_0 + nS_t\ (0 \le t \le T)$とすると、負債価値$B_0$（一定値）、発行済み株式数$n$、時点$t$での株価$S_t$が観測できれば、任意の時点における資産価値$A_t$が算出できる。これに①のモデルを当てはめ、ここからσ_Aを推定するという枠組みであれば、理論上の問題点を回避できる。σ_Aが得られれば、例えばヨーロピアン･オプションの場合には、(2.5)式（以下に再掲）よりデフォルト率を求めることが出来る。

$$\begin{aligned} EDP &= \Pr(A_T < B_T) \\ &= \Pr(\log A_T < \log B_T) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(A_0/B_T) + (\mu_A - \sigma_A{}^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

ただし、①と③のみを利用する場合は、「株価が幾何ブラウン運動にしたがう」という②の仮定がないため、この枠組みでは、株価が負の値になることを排除しないことになる。もっとも、ノックアウト･オプション･アプローチでは株価がゼロに到達した時点で（その後の株価変動は捨象して）デフォルトとなるので、こうした枠組みも許容され得ると考えられる。

また、この方法の拡張として、資産価値の変動に、ジャンプによる不連続的な変動も勘案させることが考えられる。例えば、ある企業向け債権に、突発的に（債権価値がジャンプして）デフォルトが発生する可能性がある。したがっ

て、ジャンプの効果を取り入れる[31]ことで、より現実に近いデフォルト率の推定ができる可能性がある。

６．まとめと今後の研究課題

本稿では、ファイナンス工学の理論を応用したデフォルト率の推定手法の 1 つであるオプション･アプローチによるデフォルト率推定方法に着目し、従来のヨーロピアン･オプション･アプローチに替わる手法としてノックアウト･オプション･アプローチを示した。また、それらのアプローチに基づき、本邦企業の株価データを用いた実証分析を行った。

ノックアウト･オプション･アプローチでは、現時点から将来時点までの期間を通じて、資産価値が 1 回でも負債価値を下回ればデフォルトの発生とみなす。こうした定式化は、市場は、断続的なモニタリングによって、企業のリアルタイムの財務状況も推定・把握しているとの仮定に基づいているが、特に上場企業のような市場の目に晒されている企業の場合には、この仮定が成り立っていると想定できよう。そうした意味で、デフォルト率の水準については、ヨーロピアン･オプション･アプローチで計算されたものよりも、ノックアウト･オプション･アプローチで計算されたものの方がより現実に近いとの考えも成り立ち、実務的には後者のアプローチが選好される可能性がある。

実証分析の結果、まず、それぞれのアプローチでデフォルト企業のデフォルト率を推定したところ、ノックアウト･オプション･アプローチの方が値は大きくなることが確認できた。また、それぞれのアプローチで算出されるデフォルト率の間には安定的な関係があることも判明した。さらに、それぞれのアプローチでデフォルト企業のデフォルト率を過去に遡って推定したところ、時系列での変動の仕方は殆どパラレルで安定的な関係が保たれていることも分かった。このため、信用度の時系列的な変化の方向性や企業間の比較などデフォルト率の相対比較を行うという目的に限定すれば、2 つのオプション･アプローチのどちらを使用しても実務上は有効であると考えられる。

また、2 つのオプション･アプローチのデフォルト率推定の精度については、

[31] 先行研究としては、例えば Zhou[1997]がある。ただし、Zhou[1997]では具体的なパラメータの推定方法には立ち入っていない。

①格付機関による格付との比較では、平均値で見ると低格付企業ほど高いデフォルト率となり、格付とデフォルト率の推定値との間に概ね整合的な関係が見られたほか、②両アプローチで推定したデフォルト企業と非デフォルト企業のデフォルト率を比較すると、デフォルトが起こる以前から、非デフォルト企業に比べデフォルト企業の推定デフォルト率が大きい値で推移している場合が多く、デフォルト企業を事前に判別し得る可能性があることが示された。このように、両アプローチとも実証分析により一定の有効性が認められたことから、内部格付を付与する場合などで、信用度を評価する材料の１つとして利用できる可能性がある。

このように、どちらのオプション･アプローチから推定されたデフォルト率も信用度の指標になり得ることは示されたが、現実のデフォルト率を表現するという点では、上述のように、ノックアウト･オプション･アプローチの方が選好される可能性がある。ただ、現状では上場企業のデフォルト実績が少ないこともあり、ノックアウト･オプション･アプローチで算出されたデフォルト率が、どの程度正確に真のデフォルト率を推定しているかまでは分析できなかった。今後データの蓄積が進み、この分析がある程度の精度で行えるようになると、この点を判断することができるようになると思われる。

最後に、本稿で解説したオプション･アプローチは、理論上の問題点を内包していることを示した。その上で、この問題点を回避するための現在検討中の新たな方法のコンセプトを示した。この方法を詳細に検討することについては、今後の研究課題として位置付けたい。

以　上

（補論）(3.12)式の導出方法の概要

３－２の（3.12）式では、当該企業がデフォルトしない確率、すなわち確率測度Pの下でドリフトのあるブラウン運動$\{X_t\}$が時点Tまで状態$\log B_0$に到達しない確率を先験的に与えた。ここでは、その導出方法の概要を示す。

まず、ドリフトのあるブラウン運動を、測度変換によってドリフトのないブラウン運動として扱えることを示す。次に、ドリフトのないブラウン運動が特定の状態に到達しない確率を求める。最後に、これらの結果を組み合わせることで、目的の確率が求められることを示す。

ドリフトのあるブラウン運動とドリフトのないブラウン運動

確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P)$を考える。ただし、Ωは考え得るすべての事象の集合を表し、$\mathcal{F}$はΩから生成される$\sigma-$加法族とする。Pはいわゆる現実の確率測度である。

$\mu\neq 0$として、$\{X_t\}$をPの下での$(\mu,\sigma^2)-$ブラウン運動とする。このとき、ギルザノフの定理[32]によれば、$\{X_t\}$を$(0,\sigma^2)-$ブラウン運動とするような確率測度$\tilde{P}$が存在する。以下、確率測度Pと$\tilde{P}$の間の関係を示すために、$\{X_t\}$が$(0,\sigma^2)-$ブラウン運動となるような確率測度$\tilde{P}$の存在を仮定し、そこから$\{X_t\}$を$(\mu,\sigma^2)-$ブラウン運動とする確率測度Pを求める[33]。

仮定より、確率過程$\{X_t\}$は$\tilde{P}$の下で$(0,\sigma^2)-$ブラウン運動であるので、確率過程$\{Y_t\}$を

$$Y_t=\exp\{\frac{\mu}{\sigma^2}(X_t-X_0)-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\}\quad(0\leq t\leq T)\qquad\text{（A.1）}$$

で定義すると、$\{Y_t\}$は$\tilde{P}$の下でマルチンゲールである[34]。

32 ギルザノフの定理に関しては、例えば森村・木島[1991]を参照。

33 $\tilde{P}$の存在を示すのであれば、Pの存在を仮定し、そこから$\tilde{P}$を求めた方が自然である。しかし、３－２に必要な結果を示すためにはこの計算を行っておく必要がある。

34 $\tilde{P}$の下でのウィナー過程を$\{\tilde{W}_t\}$とすると、確率過程$\{X_t\}$は$dX_t=\sigma d\tilde{W}_t$を満たす。伊藤のレンマより、$\{Y_t\}$が満たす確率微分方程式は$dY_t=\dfrac{\mu}{\sigma}Y_t d\tilde{W}_t$であり、ドリフト項がないことから$\tilde{P}$の下でマルチンゲールであることがわかる。

事象$A\,(\in\mathcal{F})$に対する測度Pを

$$P(A)=\tilde{E}[I_A Y_T] \qquad \text{(A.2)}$$

ただし、$I_{\bullet}$は定義関数、$\tilde{E}[\cdot]$は確率測度$\tilde{P}$でとった期待値.

と定義すると、Pは$\tilde{P}$と同値な確率測度である[35]。定義関数$I_{\bullet}$は、$A\,(\in\mathcal{F}),\ \omega\,(\in\Omega)$に対し

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\notin A)\end{cases} \qquad \text{(A.3)}$$

を満たす確率変数である。

以上のようにPを決めると、ギルザノフの定理によれば、$\{X_t\}$はPの下で$(\mu,\sigma^2)-$ブラウン運動になる。

ドリフトの無いブラウン運動と吸収壁

$\{X_t\}$は、確率測度$\tilde{P}$の下での$(0,\sigma^2)-$ブラウン運動で、初期値は$X_0=x_0$とする。すなわち$\{X_t\}$は、確率測度$\tilde{P}$の下でドリフトの無いブラウン運動である。

以下、状態x_0から出発した$\{X_t\}$が、その後時点Tまでに状態$m\,(<x_0)$に到達したかどうかによって場合分けをし、到達しなかった場合のX_Tの確率分布を考える。この状態mを吸収壁と呼ぶ。

X_tの$0\le t\le T$における最小値を

$$M_T=\min_{0\le t\le T}(X_t) \qquad \text{(A.4)}$$

とおくと、M_Tは確率変数である。「時点$0\le t\le T$に$\{X_t\}$が吸収壁mに到達する」という事象は、このM_Tを使って、「$M_T\le m$」と書くことができる。同様に、「時点$0\le t\le T$に$\{X_T\}$が吸収壁mに一度も到達しない」という事象は「$M_T>m$」と書ける。

---

[35] 定義より、すべての$A\,(\in\mathcal{F})$について$0\le P(A)\le P(\Omega)$が成立するが、$P(\Omega)=\tilde{E}[Y_T]=Y_0=1$である。ここで$\{Y_t\}$がマルチンゲールであることを使った。また、$A_i\cap A_j=\phi$(空集合)$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$、$P(A)=0\Leftrightarrow\tilde{P}(A)=0$も定義より示される。よって$P$は$\tilde{P}$と同値な確率測度である。

$y\,(\geq m)$ に対し、「時点 0 に x_0 から出発した X_t が、一度も m に到達せずに、時点 T に y より大きい値をとる」確率を考える。

初期条件 $X_0 = x_0$ を所与とすると、この確率は $\tilde{P}(X_T > y, M_T > m \mid X_0 = x_0)$ と書けるが、

$$\{X_T > y\} = \{X_T > y, M_T > m\} \cup \{X_T > y, M_T \leq m\},$$

$$\{X_T > y, M_T > m\} \cap \{X_T > y, M_T \leq m\} = \phi \text{（空集合）} \qquad \text{（A.5）}$$

より、

$$\begin{aligned}&\tilde{P}(X_T > y, M_T > m \mid X_0 = x_0)\\ &\qquad = \tilde{P}(X_T > y \mid X_0 = x_0) - \tilde{P}(X_T > y, M_T \leq m \mid X_0 = x_0)\end{aligned} \qquad \text{（A.6）}$$

と変形できる。この式の右辺第 2 項に鏡像原理[36]を適用すると、

$$\tilde{P}(X_T > y, M_T \leq m \mid X_0 = x_0) = \tilde{P}(X_T \leq 2m - y \mid X_0 = x_0) \qquad \text{（A.7）}$$

という関係が導かれ、結局この確率は

$$\begin{aligned}&\tilde{P}(X_T > y, M_T > m \mid X_0 = x_0)\\ &\qquad = \tilde{P}(X_T > y \mid X_0 = x_0) - \tilde{P}(X_T \leq 2m - y \mid X_0 = x_0)\end{aligned} \qquad \text{（A.8）}$$

となり、 X_T に関する条件のみを使って表すことができる。

$\tilde{P}$ の下で $\{X_t\}$ はドリフトのないブラウン運動なので、 $X_0 = x_0$ より X_T は、 $\tilde{P}$ の下で $N(x_0, \sigma^2 T)$ に従う。よって、この確率は、

$$\begin{aligned}\tilde{P}(X_T > y, M_T > m \mid X_0 = x_0) &= \int_{\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \phi(u)du - \int_{-\infty}^{\frac{2m-y-x_0}{\sigma\sqrt{T}}} \phi(u)du\\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{T}}} \phi(u)du - \int_{-\infty}^{\frac{2m-y-x_0}{\sigma\sqrt{T}}} \phi(u)du\\ &= \Phi\left(-\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{y+x_0-2m}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{aligned} \qquad \text{（A.9）}$$

となる。ここで ϕ は標準正規分布の確率密度関数であり、Φ はその分布関数であ

---

[36] 例えば森村・木島[1991]を参照。

る。

この確率を y で微分した関数を、

$$\tilde{a}_T(x_0,y,m)\overset{def}{=}-\frac{d}{dy}\tilde{P}(X_T>y,M_T>m\,|\,X_0=x_0)$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\phi(\frac{y-x_0}{\sigma\sqrt{T}})-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\phi(\frac{y+x_0-2m}{\sigma\sqrt{T}}) \qquad \text{(A.10)}$$

と定義すると、これは、吸収壁 m を持つ $(0,\sigma^2)-$ ブラウン運動が、y に到達する推移確率密度と考えることができる[37]。

ドリフトのあるブラウン運動と吸収壁

以上の結果を組み合わせることによって、ドリフトのあるブラウン運動についても、吸収壁がある場合の推移確率を求めることができる。

確率過程 $\{X_t\}$ は P の下で $(\mu,\sigma^2)-$ ブラウン運動、$\tilde{P}$ の下で $(0,\sigma^2)-$ ブラウン運動であるとする。このとき、確率測度 P の下で「時点 0 に x_0 から出発した X_t が、一度も m に到達せずに、時点 T に y より大きい値をとる」確率を求める。この確率は、$\tilde{P}$ の下での確率と同様、

$$P(X_T>y,M_T>m\,|\,X_0=x_0) \qquad \text{(A.11)}$$

と表すことができる。ここで、ギルザノフの定理により、

$$P(X_T>y,M_T>m\,|\,X_0=x_0)=\tilde{E}[I_{\{X_T>y,M_T>m\}}Y_T] \qquad \text{(A.12)}$$

$$\text{ただし、}\ Y_T=\exp\{\frac{\mu}{\sigma^2}(X_T-x_0)-\frac{\mu^2T}{2\sigma^2}\}$$

が成立する。

(A.12)式右辺の期待値は

$$\tilde{E}[I_{\{X_T>y,M_T>m\}}Y_T]=\exp\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0+\mu T)\}\tilde{E}[I_{\{X_T>y,M_T>m\}}\exp\{\frac{\mu X_T}{\sigma^2}\}]$$

[37] 推移確率密度 $\tilde{a}_T$ は、確率密度関数と違い、$-\infty<y<\infty$ について積分しても 1 にならない。これは時点 T までに吸収壁に吸収されてしまう確率が 0 以上であることによる。

$$= \exp\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0 + \mu T)\}\int_y^\infty \tilde{a}_T(x_0, u, m)\exp\{\frac{\mu u}{\sigma^2}\}du$$

$$= \exp\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0 + \mu T)\}$$
$$\times \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\int_y^\infty [\phi(\frac{u - x_0}{\sigma\sqrt{T}}) - \phi(\frac{u + x_0 - 2m}{\sigma\sqrt{T}})]\exp\{\frac{\mu u}{\sigma^2}\}du$$

$$= \Phi(-\frac{y - x_0 - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}) - \exp\{-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x_0 - m)\}\Phi(-\frac{y + x_0 - \mu T - 2m}{\sigma\sqrt{T}}) \quad \text{（A.13）}$$

と纏めることができる。

これに、$x_0 = \log A_0$、$y = m = \log B_0$、$\mu = \mu_A - \sigma_A^2/2$、$\sigma = \sigma_A$を代入すると、３－２の（3.12）式に与えた、デフォルトしない確率が求まる。

（参考文献）

Black, Fisher and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(3), 1973, pp.637-654

Crouhy, Michel, Dan Galai, and Robert Mark, "A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models," *Journal of Banking & Finance,* 24, 2000, pp. 59-117.

Merton, Robert C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance,* 29, 1974, pp.449-70.

Zhou, Chunsheng. "A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities," Working paper, Federal Reserve Board, March, 1997,

石渡明、「格付別『広義デフォルト率』について」、日本格付投資情報センター･ニュース･リリース、2000 年 6 月

黒子貴史、神山直樹、「倒産確率推定モデルの精度比較検証」、『証券アナリストジャーナル』、2000 年 4 月、pp.76-90.

斎藤啓幸、森平爽一郎、「銀行の債務超過（倒産）確率　オプション･アプローチによる推定」、日本金融・証券計量・工学学会、1998 年度夏季大会予稿集 pp.228-45.

森平爽一郎、「倒産確率推定のオプション･アプローチ」、『証券アナリストジャーナル』、1997 年 10 月、pp.2-9.

————、「信用リスクの測定と管理　第 1 回～第 6 回」、『証券アナリストジャーナル』、1999 年 9 月～2000 年 7 月

森村英典、木島正明、『ファイナンスのための確率過程』、日科技連、1991 年