

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

信用リスクのある金融商品の
コックス過程を用いたプライシング方法

まるも こうへい いえだ あきら
丸茂幸平・家田 明

Discussion Paper No. 2000-J-30

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

信用リスクのある金融商品の コックス過程を用いたプライシング方法

まるも こうへい* ・ いえだ あきら*

要 旨

信用リスクのある金融商品のプライシングで重要となるのがデフォルト事象の扱いである。デフォルト事象を数学的に取扱う方法として、ポアソン過程によるものがある。これは、各瞬間における「デフォルトの起りやすさ」を表す強度を定義し、この強度を持つポアソン過程の最初のジャンプをデフォルトとみなす方法である。ただし、ポアソン過程による定式化を行う場合には、デフォルト強度が確定的であるという仮定が必要である。コックス過程では、この仮定を緩和し、デフォルト強度が確率過程である場合を扱う。

本稿では、ランドによって示された、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品のプライシングの枠組み(Lando[1998])を、数学的証明を展開しつつ解説すると共に、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品(クレジット・デリバティブズ等)のプライシングの具体例についても解説を行う。さらに、実際のプライシングで活用されることが多いダフィー等によるプライシング・モデルとの関係を説明する。信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上の制約(データの制約等)から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱い易くすることが多いが、理論の数学的内容を理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定が与える影響等を認識・評価するために重要である。

キーワード：信用リスク、プライシング、クレジット・デリバティブズ、ポアソン過程、コックス過程

JEL classification: G12

* 日本銀行 金融研究所 研究第1課

(E-mail: kouhei.marumo@boj.or.jp, akira.ieda@boj.or.jp)

本稿作成にあたっては、森平爽一郎教授(慶応大学)から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属する。

目 次

1 . はじめに	1
2 . 信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方	2
2 - 1 金融商品の理論価格の導出方法	2
2 - 2 個々の経済主体による金融商品の評価	5
3 . コックス過程の構築	6
3 - 1 ポアソン過程	6
3 - 2 コックス過程の定義	8
3 - 3 コックス過程の下でのデフォルト時刻の定式化	9
4 . 3つの基本的な証券	12
4 - 1 3つの基本的な証券とその評価式	12
4 - 2 評価式の導出	17
5 . ダフィー等によるプライシング・モデル	22
5 - 1 ダフィー等の定式化	22
5 - 2 (5.3)式の証明の概略	24
6 . 結語	26
(補論) 確率過程論の用語集	28
(参考文献)	33

1. はじめに

信用リスクのある金融商品 (defaultable contingent claim) のプライシング手法において、重要となるのがデフォルト事象の扱いである。デフォルト事象を数学的に扱う場合、デフォルトは予め知ることはできない「時刻」に発生すると考え、その「時刻」をモデル化するという手法がある。この手法では、まず各瞬間におけるデフォルトの「起こりやすさ」を表す強度 (intensity) を定式化する¹。デフォルト事象は、ここで定式化された強度を持つポアソン過程 (Poisson process) の最初のジャンプとして表現され、ここからデフォルト時刻の分布が導かれる。

強度を定式化する際には、時間に依存しない一定値と仮定したり、ある確定的な関数を仮定する場合がある。しかし、強度の確率的な変動を表現するために、強度を確率過程で表すことも可能である。このように強度を確率過程で置き換えた場合のポアソン過程は「コックス過程 (Cox process)」と呼ばれる。

本稿では、コペンハーゲン大学のランドによって示された、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品のプライシングの枠組み (Lando[1998]) を、数学的証明を展開しつつ解説すると共に、コックス過程を用いた信用リスクのある金融商品 (クレジット・デリバティブズ等) のプライシングの具体例についても解説を行う。さらに、実際のプライシングで活用されることが多いダフィー等によるプライシング・モデルとの関係を説明する。信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上の制約 (データの制約等) から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱い易くすることが多いが、理論の数学的内容を理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定が与える影響等を認識・評価するために重要である。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第2章で信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方を整理する。次に第3章で、コックス過程の解説を行い、第4章でコックス過程とプライシングの関係を整理する。第5章では、第4章の結果を基にダフィー等によるプライシング・モデル (Duffie and Singleton[1998]) を解説する。なお、本論で展開される数学的議論の参考として、確率過程論の用語集を補論として添付した。

¹ これとは別の方法として、ある企業の資産価値が確率的に変動すると仮定し、それが一定の水準を下回った場合にデフォルトが生じると考える方法がある。

2. 信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方

本章²では、まず2 - 1節で、金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法を概説する。本稿で扱うコックス過程を用いたプライシングの枠組みも、この仮定の下で行われる。次に2 - 2節では、この仮定と金融機関等が算出する与信プレミアムの構成との関係について若干の考察を行う。

2 - 1 金融商品の理論価格の導出方法

本節では、デリバティブズ等金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法（プライシング理論）について解説を行う。

金融商品のプライシング理論の根幹をなす考え方として、無裁定条件と金融市場の完備性を基本とするものがある。ここで、無裁定条件とは、リスクなしで利益を稼ぐ（フリー・ランチにあずかる）ことは出来ないということで、全く同じキャッシュフローを持つ二つの金融商品の価格は同一でなければならないという条件である。また、市場が完備であるとは、任意のキャッシュフローが、市場で流通し価格が存在する金融商品の組み合わせによって複製することが可能であることを言う³。

これらの無裁定条件と金融市場の完備性を前提とすれば、金融商品の理論価格は、現時点から将来にかけて発生するキャッシュフローの割引現在価値を合計し、リスク中立測度に関する期待値を計算することによって得ることができるというのが、プライシング理論の根幹をなす考え方である⁴。これは、数理ファイナンスの世界の用語を使って述べると、「無裁定条件と市場の完備性が成立している場合には、無リスク資産を基準財として、全ての資産の相対価格をマルチンゲールとするリスク中立測度がただ一つ存在する」という定理である。

² 信用リスクのある金融商品のプライシングの包括的な解説書としては、小田[1998]等がある。

³ この場合、取引に掛かる税金やコスト等がない（摩擦がない）こと、任意の金額のポジションをとることが可能であることが仮定されている。

⁴ これは、Harrison and Pliska[1981]によって示されたものである。なお、リスク中立測度は、このようなプライシングを行う際に利用される概念であり、いわゆる「現実の確率」とは異なる。

この定理が主張するのは、ある金融商品の将来のキャッシュフローが確定的ではなく、個々の経済主体が自らのリスク許容度等に基づいて行う評価が異なり得る場合でも、理論的な公正価格が存在するということである。

この考え方をを用いた理論価格の定式化を具体的に見てみよう。以下では、無裁定条件と金融市場の完備性を仮定する⁵。この仮定の下では、デフォルトが時点 $t(t \leq T)$ で発生した場合に Z_t 円の支払が発生し、満期 T までデフォルトが発生しなかった場合に X 円の支払が発生する、信用リスクのある金融商品の時点 t (現時点)における価格を S_t 円とおくと、上述の定理を用いて、

$$S_t = E_t[\exp\{-\int_t^T r_u du\}Z_t 1_{\{t \leq T\}} + \exp\{-\int_t^T r_u du\}X 1_{\{t > T\}} | \mathcal{F}_t] \quad (2.1)$$

と表すことができる。 E_t は時点 t までに得られた情報を所与とした場合のリスク中立測度による期待値演算子、 t はデフォルト時点を表す確率変数、 r_u は時点 u での無リスク(デフォルト・フリー)の短期金利、 $1_{\{\cdot\}}$ は定義関数⁶である。

さて、単純化のため元本を1円とする割引債(すなわち X を1としたもの)を考える。回収額に関しては、やや技術的になるが、確率過程 $\{L_u\}_{0 \leq u \leq T}$ とデフォルト時点 t を使って、 L_t と表す⁷。

さらに、「無リスク金利過程 $\{r_u\}_{0 \leq u \leq T}$ 、回収額過程 $\{L_u\}_{0 \leq u \leq T}$ 、デフォルト過程 $\{1_{\{t \leq u\}}\}_{0 \leq u \leq T}$ は、リスク中立下で互いに独立である」との仮定を置くと、(2.1)式は、

⁵ 実際の市場では、取引コスト等の要因から無裁定条件が成立していない場合があると考えられる。また、市場の完備性も、任意のペイオフを複製できる金融商品が存在しない場合が多く、成立していないのがむしろ普通である。完備性が成立しない場合には、例えば適当なモデルを導入することによって、市場で流通している金融商品の価格からモデルのパラメータを推定し、それによって、任意のペイオフをプライシングするという手法が用いられる(第3章で触れるクレジット・スワップ・オプションのプライシングがその具体例である)。

⁶ $1_{\{A\}}$ は、事象 A が真のとき1、そうでないとき0(ゼロ)となる。

⁷ この表記の背後には次のような考え方がある。すなわち、まず、回収額はデフォルト時点に依存するものと考え、デフォルトが時点 $u(0 \leq u \leq T)$ に発生した場合の回収額を L_u とおく。一方、 L_u の値が確率的に変動するものと考え、 $\{L_u\}_{0 \leq u \leq T}$ は確率過程である。この L_u にデフォルト時点 t を与えた L_t をデフォルト時の回収額とした。

$$S_t = E_t[\exp\{-\int_t^T r_u du\}]E_t[L^T \cdot 1_{\{t \leq T\}} + 1 \cdot 1_{\{t > T\}} | \mathbf{t} \geq t] \quad (2.2)$$

$$\text{ただし、 } L^T = L_t \exp\{\int_t^T r_u du\}$$

と表され、さらに $1_{\{t \leq T\}} = 1 - 1_{\{t > T\}}$ であることを用いると、

$$S_t = S^0(t, T)[E_t[L^T] + (1 - E_t[L^T])P_t\{t > T | \mathbf{t} \geq t\}] \quad (2.3)$$

ただし、 $S^0(t, T) = E_t[\exp\{-\int_t^T r_u du\}]$ (満期 T のデフォルト・フリーの割引債の時点 t での価格)

$$P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t) = E_t[1_{\{t > T\}} | \mathbf{t} \geq t]$$

と整理することができる。市場の完備性を利用すれば、 $P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t)$ を推定することができることになる。また、 $P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t)$ が求めれば、それを用いて任意のペイオフの理論価格を計算することも可能となる。

$P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t)$ の計算は、例えば市場で観測されるクレジット・スプレッドを用いて行なうことができる。時点 t でのある社債 (満期 T の割引債) とデフォルト・フリーの割引債 (満期 T) の利回りを各々 $Yield_t$ 、 $Yield_t^0$ とする。同社債のクレジット・スプレッド CS は利回りの差として次のように表すことができる⁸。

$$\begin{aligned} CS &= Yield_t - Yield_t^0 \\ &= -\frac{1}{T-t} \log \frac{S_t}{S^0(t, T)} \end{aligned}$$

(2.3)式を用いると、クレジット・スプレッド CS は

$$CS = -\frac{1}{T-t} \log[E_t[L^T] + (1 - E_t[L^T])P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t)]$$

と表される。さらに $L_t \equiv L$ (一定) との仮定を置くと、満期 T の社債のクレジット・スプレッドから、 $P_t(t > T | \mathbf{t} \geq t)$ を計算することができる。

⁸ 実際のスプレッドには信用リスクの他に流動性リスク等も反映されていると考えられる。

2 - 2 個々の経済主体による金融商品の評価

前節では、金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法を概説した。そのポイントは、無裁定条件と金融市場の完備性が成立するとの条件下では、金融商品の理論的な公正価格は、無リスク金利やリスク中立測度など市場全体に共通のファクターによって決定されることであった。この理論価格は、市場で取引可能と考えられる価格であり、市場全体の需要と供給が反映された価格であると考えることが出来る。つまり、この価格は、市場ないし市場を構成する他の金融商品の価格と整合的になるように決まる客観的な価格である。したがって、こうしたプライシング手法は、金融商品の客観的な価格を計算したい場合に使用するべきものである。

一方、個々の経済主体は自らのリスク許容度等に基づいて金融商品の評価を行う。金融機関が金融商品を取引する場合を考えよう。金融機関の実務では、金融商品取引の取引条件は、取引に掛る諸コストやリスクに対する引当金コストなど、個別のファクターにも依存して主観的に決められるのが一般的である。本節では、具体例として、金融機関等が貸出レートを算出する際に用いられる考え方の概要について触れる。

金融機関がある企業に与信を行う場合、与信先の信用度や当該与信の採算性が考慮される。具体的には、金融機関は、資金調達コスト、当該取引にかかる事務コスト、期待損失額に対する引当金コスト、予期しない損失額に対する資本コストを回収した上、超過収益を得ることを目標として貸出レートを設定する。

これらのうち、資金調達コストは、無リスク金利水準と当該金融機関の信用度によって決まると通常は考えることができる。

次に、期待損失額に対する引当金と予期しない損失額に対する資本コストは、与信先の信用リスクに対するプレミアムと考えることができる。ここで、期待損失額は、回収率などを考慮した上での損失額の期待値と考えることができる。また、予期しない損失額は、当該金融機関のポートフォリオの損失額分布を基に算出される。

さらに、超過収益は、当該金融機関の経営戦略（例えば目標 ROE）や与信先との取引関係等によって決定される。

このように貸出レートの決定には、
のような自行の状況に依存する要因や、
のように自行と取引先との関係に依存する要因が含まれている。

3. コックス過程の構築

前章では、信用リスクのある金融商品のプライシングの基本的な考え方をみてきた。本章以降では、前章第1節でみた金融商品の理論的な公正価格（理論価格）を導出する方法の解説を行う。本章では、前章で詳細には触れなかったデフォルト事象や各時点における情報等の数学的定式化を見ていくこととする⁹。

すなわち、まず各時点でのデフォルトの「起こりやすさ」を強度関数で表し、デフォルト事象をポアソン過程での最初のジャンプとして定式化する。

さらに、強度の確率的変動を表現するために、強度が確率過程である場合を考察する。このようにポアソン過程の強度関数を確率過程としたものを「コックス過程」と呼ぶ。この場合のデフォルト事象の定式化では、各時点における「情報」を表すフィルトレーションの概念が重要になる。

3 - 1 ポアソン過程

ゼロ以上の整数値をとる計数過程 $\{N_t\}$, ($t \geq 0, N_0 = 0$) が

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\int_s^t l(u) du)^k}{k!} \exp\{-\int_s^t l(u) du\}, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.1)$$

を満たすとき、 $\{N_t\}_{0 \leq t}$ を強度¹⁰関数（intensity function）を $l(\cdot)$ とするポアソン過程（Poisson process）という。ただし、 $l(\cdot)$ は時間に関する確定的な関数で、非負の値をとるものとする。

観測対象とする事象（ここではデフォルト）が時刻 $t (\geq 0)$ まで発生しない確率

⁹ なお、本章での議論は、特定の確率測度を前提としていない。

¹⁰ 強度は、直観的には次のように理解できる。観測対象とする事象が、時間区間 $[t, t + \Delta t)$ に発生する確率の 1 次近似は $\int_t^{t+\Delta t} l(s) ds$ で与えられる。 Δt が微小であるとき、この積分は $l(t)\Delta t$ と近似できる。したがって、強度は各時刻でのその事象の「起こりやすさ」を表す。

は、(3.1)式より

$$P(N_t = 0) = \exp\{-\int_0^t l(u)du\}$$

と表される。

ここで、観測対象とする事象（デフォルト）が起こる時刻 $t(\geq 0)$ を考える。デフォルト時刻 t をポアソン過程の最初のジャンプに対応させると、

$$t = \sup\{t : N_t = 0\}$$

であるが、同値な表現として以下のものがある。

t は、期待値 1 の指数分布に従う確率変数 E_1 を使って

$$t = \inf\{t : \int_0^t l(u)du \geq E_1\} \quad (3.2)$$

と表すことができる。

(証明)

t の定義より

$$t = \sup\{t : N_t = 0\}$$

である。ここで t の分布関数 $F(x) = P(t \leq x)$ を考えると、

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\sup\{t : N_t = 0\} \leq x) \\ &= P(N_x \geq 1) \\ &= 1 - P(N_x = 0) \\ &= 1 - \exp\{-\int_0^x l(u)du\} \end{aligned}$$

と計算される。

一方、 $t_1 = \inf\{t : \int_0^t l(u)du \geq E_1\}$ の分布関数 $F_1(x) = P(t_1 \leq x)$ は、

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(\inf\{t : \int_0^t l(u)du \geq E_1\} \leq x) \\ &= P(E_1 \leq \int_0^x l(u)du) \\ &= 1 - \exp\{-\int_0^x l(u)du\} \end{aligned}$$

であるので、 t と t_1 は同じ分布関数を持つ。確率変数 E_1 は、「期待値 1 の指数分布に従う」という他に制約条件がないので、

$$\sup\{t : N_t = 0\} \equiv \inf\{t : \int_0^t l(u) du \geq E_1\}$$

となるように定義することができる。したがって、 $t(\mathbf{w}) \equiv t_1(\mathbf{w})$ となるように $E_1(\mathbf{w})$ を定義できる。

(証明終)

3 - 2 コックス過程の定義

前節のポアソン過程では、強度 $l(\cdot)$ を確定的な関数として扱った。この定式化では、「注目する企業の将来の信用状況が現時点でわかっている」という仮定が暗に置かれている。

しかし、このように将来時点の信用状況が現時点で既にわかっているというのは非常に強い仮定である。本節では、この条件を少し緩和し、強度が確率的に変動する場合について考察する。

すなわち、強度 l は時刻 $s (\geq 0)$ と根元事象 $\mathbf{w} (\in \Omega)$ の関数で、 s, \mathbf{w} を与えた $l(s, \mathbf{w})$ は非負の実数値をとるものとする。このような確率過程 $\{l(s, \cdot)\}_{0 \leq s \leq T}$ は、非負の実数値をとる確定的な関数 $l(\cdot)$ と、 $0 \leq s \leq T$ で定義された確率過程 $\{X_s(\cdot)\}_{0 \leq s \leq T}$ を使って、

$$l(s, \mathbf{w}) \equiv l(X_s(\mathbf{w})) \tag{3.3}$$

と表すことができる。ただし、 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ を R^d の値をとる (すなわち d 変量の) 右連続左極限の確率過程とし、 $l : R^d \mapsto [0, \infty)$ とする。

強度をこのように定式化することの意味については、次のように理解することができる。注目している企業の信用状況に影響する d 個の変数がすべて特定できたとする。これら d 個の変数を状態変数 (state variable) と呼び、まとめて X (d 次元ベクトル) で表す。そうすると、強度 l は状態変数 X の関数 $l(X)$ として $l = l(X)$ のように表すことができる。ただし、 d 個の状態変数の中に確率的に変動するものが含まれている場合には、 X を確率過程と考えることが必要になる。(3.3) 式のような定式化は、確率過程として表された状態変数 $\{X_s(\cdot)\}_{0 \leq s \leq T}$

を通して強度を表している（なお、以下では、 $I(X_s)$ を単に I_s と表記することがある）。

このように、強度を確率過程にまで拡張した計数過程 $\{N_s\}_{0 \leq s \leq T}$ を「コックス過程」という。

3 - 3 コックス過程の下でのデフォルト時刻の定式化

前節で述べたように、コックス過程は、ポアソン過程の強度関数を確率過程に置き換えたものである。コックス過程の下でのデフォルト時刻 t も、ポアソン過程の場合と同様に、最初のジャンプに対応させて、

$$t = \sup\{t : N_t = 0\}$$

ただし、 $\{N_s\}$ は強度過程 $\{I_s\}$ を持つコックス過程と定義することは自然である。

デフォルト時刻 t についてさらに考察するためには、多少の数学的準備を必要とする。まず、時間とともに「情報」が増大していく様子を表すためにフィルトレーションの概念を導入する。

確率過程 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ に対応するフィルトレーションを $\{\mathcal{G}_s\}_{0 \leq s \leq T}$ とする。ただし、確率過程 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ は、前節で示した d 変数の状態変数のベクトルである。

フィルトレーション $\{\mathcal{G}_t\}$ の形式的な定義は

$$\mathcal{G}_t = \mathbf{s}(X_s : 0 \leq s \leq t), 0 \leq t \leq T$$

と書くことができる。ただし、 $\mathbf{s}(X_s : 0 \leq s \leq t)$ は、 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq t}$ を可測にする最小の \mathbf{s} -加法族である。

直観的には、 \mathcal{G}_t は「 d 個の状態変数 $\{X_s\}$ の時点 t までの履歴」という情報を表すと考えることができる。また、 d 個の状態変数 $\{X_s\}$ によってデフォルト強度が決められることを思い出すと、 \mathcal{G}_t が与えられれば、デフォルト強度 I_s の $0 \leq s \leq t$ における履歴も与えられることがわかる。

このようにフィルトレーションを定義すると、以下の関係が成立する。

$$P(t > t | \mathcal{G}_t) = \exp\{-\int_0^t I_s ds\}, t \in [0, T] \quad (3.4)$$

$$P(t > t) = E[\exp\{-\int_0^t I_s ds\}], \quad t \in [0, T] \quad (3.5)$$

(証明)

(3.4)式左辺は、

$$P(t > t | \mathcal{G}_t) = P(N_t = 0 | \mathcal{G}_t)$$

であるが、 $P(N_t = 0 | \mathcal{G}_t)$ は、強度過程 $\{I_s\}_{0 \leq s \leq t}$ を与えたときの確率を表すので、強度が確定的な場合と同様の計算ができて、

$$P(N_t = 0 | \mathcal{G}_t) = \exp\{-\int_0^t I_s ds\}$$

となり、右辺と等しい。

また、(3.5)式は

$$\begin{aligned} P(t > t) &= E[1_{\{t > t\}}] \\ &= E[E[1_{\{t > t\}} | \mathcal{G}_t]] \\ &= E[P(t > t | \mathcal{G}_t)] \\ &= E[\exp\{-\int_0^t I_u du\}] \end{aligned}$$

のように示される。

(証明終)

また、 $t \leq T$ より(3.4)式の期待値の条件を \mathcal{G}_t から \mathcal{G}_T に交換しても同様の証明ができて、

$$P(t > t | \mathcal{G}_T) = \exp\{-\int_0^t I_u du\}, \quad t \in [0, T] \quad (3.6)$$

が成立する。

デフォルト時刻 t は、強度が確定的である場合と同様に、期待値 1 の指数分布に従う確率変数 E_1 (ただし、 E_1 と $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ は互いに独立) を使って、以下のように表すことができる。

$$t = \inf\{t : \int_0^t I_s ds \geq E_1\} \quad (3.7)$$

(証明)

$t_1 = \inf\{t : \int_0^t I_s ds \geq E_1\}$ において、その分布と先に定義した $t = \sup\{t : N_t = 0\}$ の分布を比較する。まず、 $0 \leq t \leq s \leq T$ のとき、 \mathcal{G}_s で条件付けした場合の確率を考える。

t については、(3.4)式と同様の証明ができて、

$$P(t > t \mid \mathcal{G}_s) = \exp\{-\int_0^t I_u du\}$$

が成立する。 t_1 については、

$$\begin{aligned} P(t_1 > t \mid \mathcal{G}_t) &= P(\inf\{s : \int_0^s I_u du \geq E_1\} > t \mid \mathcal{G}_t) \\ &= P(\int_0^t I_u du < E_1 \mid \mathcal{G}_t) \end{aligned}$$

であるが、 $\int_0^t I_u du$ が \mathcal{G}_s -可測であり、また E_1 と $\mathcal{G}_s = \mathbf{s}(X_u : 0 \leq u \leq s)$ が独立であるので、結局、

$$P(t_1 > t \mid \mathcal{G}_s) = \exp\{-\int_0^t I_u du\}$$

が成立し、両者は分布として互いに等しい。

次に、 $0 \leq s < t \leq T$ として、 \mathcal{G}_s で条件付けした場合を考える。

t については、

$$\begin{aligned} P(t > t \mid \mathcal{G}_s) &= E[1_{\{t > t\}} \mid \mathcal{G}_s] \\ &= E[E[1_{\{t > t\}} \mid \mathcal{G}_t] \mid \mathcal{G}_s] \\ &= E[P(t > t \mid \mathcal{G}_t) \mid \mathcal{G}_s] \\ &= E[\exp\{-\int_0^t I_u du\} \mid \mathcal{G}_s] \\ &= \exp\{-\int_0^s I_u du\} E[\exp\{-\int_s^t I_u du\} \mid \mathcal{G}_s] \end{aligned}$$

と計算される。 t_1 については、

$$\begin{aligned} P(t_1 > t | \mathcal{G}_s) &= E[1_{\{t_1 > t\}} | \mathcal{G}_s] \\ &= E[E[1_{\{t_1 > t\}} | \mathcal{G}_t] | \mathcal{G}_s] \\ &= E[P(t_1 > t | \mathcal{G}_t) | \mathcal{G}_s] \\ &= E[\exp\{-\int_0^t I_u du\} | \mathcal{G}_s] \\ &= \exp\{-\int_0^s I_u du\} E[\exp\{-\int_s^t I_u du\} | \mathcal{G}_s] \end{aligned}$$

であり、この場合もやはり両者は分布として等しい。よって、 t と t_1 の $\{\mathcal{G}_s\}$ に関する条件付き分布は等しく、また、 $\{\mathcal{G}_s\}$ と $s(E_1)$ が独立なことから、 $t(w) \equiv t_1(w)$ となるように $E_1(w)$ を定義することができる。

(証明終)

4 . 3つの基本的な証券

信用リスクのある金融商品の価格を表現するためには、4 - 1節で説明する3つの基本的な証券を利用することができる。無裁定条件と金融市場の完備性が成立するとの仮定の下で、ほとんどの信用リスクのある金融商品はこれら3つの基本的な証券の組合せとして表現することができる。以下、4 - 1節で3つの基本的な証券とその評価式を示す。4 - 2節では、評価式の証明を行う。

4 - 1 3つの基本的な証券とその評価式

信用リスクのある金融商品を表現するには、以下の3つの基本的な証券を利用することができる。

1 . $X1_{\{t > T\}}$

時刻 T 迄にデフォルトが生じなかった場合に X の支払がある証券。ただし、 X は \mathcal{G}_T -可測な確率変数とする。

$$2. Y_s 1_{\{t > s\}}$$

デフォルト時刻 t まで連続的に Y_s が支払われる証券。ただし、 $\{Y_s\}_{0 \leq s \leq T}$ は $\{\mathcal{G}_t\}$ -適度な確率過程とする。

$$3. Z_t 1_{\{t \leq T\}}$$

時刻 T までにデフォルトが生じた場合にデフォルト時点 t で Z_t が支払われる証券。ただし、 $\{Z_s\}_{0 \leq s \leq T}$ は $\{\mathcal{G}_t\}$ -適度な確率過程とする。

つまり、信用リスクのある金融商品のプライシングに必要な将来のキャッシュフロー情報は、予め決められた時刻に発生する支払 (X, Y_s) とデフォルト時の支払 ($Z_t < \text{例えば回収額} >$) に関するものである。

以下、これら証券の理論価格に関する期待値計算の結果を示す。仮定として、無リスク短期金利過程 $\{r_s\}$ ($= \{R(X_s)\}$) を $\{\mathcal{G}_t\}$ -適当とし、以下の 3 つの期待値について、

$$\begin{aligned} E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} | X] &< \infty \\ E[\int_t^T |Y_s| \exp\{-\int_t^s r_u du\} ds] &< \infty \\ E[\int_t^T |Z_s I_s| \exp\{-\int_t^s (r_u + I_u) du\} ds] &< \infty \end{aligned}$$

という関係が満たされたとする。

また、デフォルト過程 $\{1_{t \leq s}\}$ に対応するフィルトレーション

$$\mathcal{H}_t = \mathbf{s}(1_{\{t \leq s\}} : 0 \leq s \leq t), \quad 0 \leq t \leq T$$

を定義する。これは、 \mathcal{H}_t は「時点 t までにデフォルトが起こったか否か、起こったならいつ起こったのか」という情報を表すものと考えることができる。

さらに、別のフィルトレーションとして

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

を定義する。ただし、記号 \vee は二つの \mathbf{s} -加法族を合せた \mathbf{s} -加法族を与える演算子で、 \mathbf{s} -加法族 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して、 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ は、

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

を満たす最小の σ -加法族と定義される。直観的には、 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ は情報 \mathcal{A} , \mathcal{B} を合せた情報と考えることができる。 $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ の例では、 \mathcal{F}_t は、時刻 t までの状態変数の履歴に関する情報とデフォルト事象が発生したか否かに関する情報を合せたものである。

以上の設定の下、上述の 3 つの証券に関して、

$$E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X 1_{\{t > T\}} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > T\}} E[\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X | \mathcal{G}_t] \quad (4.1)$$

$$E[\int_t^T \exp\{-\int_s^u r_u du\} Y_s 1_{\{t > s\}} ds | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > T\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u + I_u) du\} Y_s ds | \mathcal{G}_t] \quad (4.2)$$

$$E[\exp\{-\int_t^t r_s ds\} Z_t 1_{\{t < t \leq T\}} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > T\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u + I_u) du\} I_s Z_s ds | \mathcal{G}_t] \quad (4.3)$$

という評価式が成立する。これら評価式の導出は後述する。

期待値演算をリスク中立測度の下で行えば、これらは、各々の証券の時刻 t での理論価格を与える。デフォルト事象を上述のようにコックス過程で表現すると、これら証券の価格は、無リスク金利 $\{r_s\}$ と強度 $\{I_s\}$ を使って表されることがわかる。

さて、上式の導出を行う前に、これらの基本的な証券の組合せによって、信用リスクのある金融商品の価値が表現できる具体例を示す。

(例 1) クレジット・デフォルト・スワップ

クレジット・デフォルト・スワップでは、リファレンス資産(債券)が満期 T までにデフォルトを来たした場合に、スワップの売り手が買い手に対して元本(1円)から回収額(L_s 円)を控除した金額 $1 - L_s$ 円を支払う。 $t=0$ とし、この時点までにデフォルトが発生していないとすると、このキャッシュフローの現在価値 p_1 は、

$$p_1 = E[\exp\{-\int_0^t r_u du\}(1-L_t)]$$

であるが、これは(4.3)式より、

$$p_1 = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s (r_u + I_u) du\} I_s (1-L_s) ds]$$

となる（ $t=0$ における自明な条件 \mathcal{G}_0 は省略した<以下同様>）。

一方、買い手は、売り手に対して固定レート（プレミアム<保証料>）をデフォルト時ないし満期まで支払う。ここでは、この固定レート（ SP とする）が連続的に支払われると仮定しよう。このキャッシュフローの現在価値を p_2 円とすると、

$$p_2 = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s r_u du\} SP 1_{\{t>s\}} ds]$$

であるが、これは(4.2)式より、

$$p_2 = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s (r_u + I_u) du\} SP ds]$$

となる。スワップの契約は、契約時点での支払と受取のキャッシュフローの現在価値が等しくなるように行われるので、 $p_1 = p_2$ が成立する¹¹。すなわち、

$$E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s (r_u + I_u) du\} \{SP - I_s (1-L_s)\} ds] = 0$$

が成立つ。ここから、金利スワップのアナロジーとして、デフォルト・スワップは固定レート SP と変動レート $I_s (1-L_s)$ を交換する取引であると見なすことができる。

次に、変動レート $I_s (1-L_s)$ の意味を考える。第5章の結論を先取りすると、以下のような議論が可能である。ある企業が発行する割引債（現時点0、満期 T ）の価格を $q(0, T)$ とする。満期までにデフォルトが発生しなかった場合には、満期時点で1円が支払われ、満期までの時刻 t ($0 < t \leq T$)にデフォルトが発生した場合には、デフォルト時点で L_t ($0 \leq L_t < 1$)円だけが支払われるものとする。第2

¹¹ この定式化では、デフォルト・スワップ契約のカウンターパーティがデフォルトするリスクは捨象した。

章と同様、満期 T に 1 円が支払われるデフォルトのない割引債の現時点の価格 $S^0(0, T)$ を

$$S^0(0, T) = E[\exp\{-\int_0^T r_u du\}]$$

とする。第 5 章の結果によると、無リスク金利過程とデフォルト過程が独立であると仮定し、デフォルトが発生した場合の回収率 d_t を回収額とデフォルト直前の債券価格の比で定義すると、 $q(0, T)$ は

$$q(0, T) = E[\exp\{-\int_0^T (1-d_u)I_u du\}]S^0(0, T)$$

と書ける。したがって、当該割引債と無リスク金利とのスプレッドを $y(0, T)$ とおくと、

$$\exp\{-y(0, T)T\} = E[\exp\{-\int_0^T (1-d_u)I_u du\}]$$

が得られる。さらに、 d_t と L_t の差が無視し得る場合には、変動レート $I_s(1-L_s)$ は、満期 T の事業債（割引債）のクレジット・スプレッドに（積分の指数の期待値として）等しいことが導かれる。

以上のようにクレジット・デフォルト・スワップの固定レートは、幾つかの仮定を置けば、市場で観測される事業債のクレジット・スプレッドと等しいとの結論を得ることができる。

（例 2）クレジット・スプレッド・オプション

クレジット・デフォルト・スワップ契約を将来時点 T 、行使レート K で締結できる権利（クレジット・スプレッド・オプション）を考える。ただし、時点 T までにデフォルトが発生した場合には当該権利が消滅するものとする。 T' をデフォルト・スワップの満期、 SP_t を t 時点のデフォルト・スワップの市場レートとする。

オプションの満期時点 T における、行使レート K によるキャッシュフローの価値 p_K は、（例 1）と同様の議論により、

$$p_K = E[\int_T^{T'} \exp\{-\int_T^s (r_u + I_u) du\} K ds | \mathcal{G}_T]$$

で与えられる。また、市場レート SP_T によるキャッシュフローの価値 p_{SP_T} も

$$p_{SP_T} = E\left[\int_T^{T'} \exp\left\{-\int_T^s (r_u + I_u) du\right\} SP_T ds \mid \mathcal{G}_T\right]$$

と求められる。したがって、時点 T におけるオプションの価値 C_T は、

$$C_T = \max(p_{SP_T} - p_K, 0) = \max(SP_T - K, 0) E\left[\int_T^{T'} \exp\left\{-\int_T^s (r_u + I_u) du\right\} ds \mid \mathcal{G}_T\right]$$

で与えられる。

当該オプションの現在価値を p_3 とすると、

$$p_3 = E\left[\exp\left\{-\int_0^T r_u du\right\} C_T 1_{\{t > T\}}\right]$$

である。式中の $1_{\{t > T\}}$ は、「時点 T までにデフォルトが発生した場合には当該権利が消滅する」という条件に対応している。この式には、(4.1)式が適用できて、
結局

$$p_3 = E\left[\max(SP_T - K, 0) \int_T^{T'} \exp\left\{-\int_0^s (r_u + I_u) du\right\} ds\right]$$

が得られる。この場合の具体的な価格の導出には、例えばクレジット・スプレッド自体等のモデル化を行うことが必要となる。

4 - 2 評価式の導出

次に、3つの基礎的証券の評価式である(4.1)～(4.3)式を導出する。まず、その準備として、以下の関係が成立することを示す。

$$E[1_{\{t \geq T\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = 1_{\{t > T\}} \exp\left\{-\int_t^T I_s ds\right\} \quad (4.4)$$

(証明)

$$\begin{aligned} E[1_{\{t \geq T\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] &= E[1_{\{t \geq T\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \{\{t \leq t\}, \{t > t\}\}] \\ &= 1_{\{t \leq t\}} E[1_{\{t \geq T\}} \mid \mathcal{G}_T, \{t \leq t\}] + 1_{\{t > t\}} E[1_{\{t \geq T\}} \mid \mathcal{G}_T, \{t > t\}] \\ &= 1_{\{t \leq t\}} P(t \geq T \mid \mathcal{G}_T, \{t \leq t\}) + 1_{\{t > t\}} P(t \geq T \mid \mathcal{G}_T, \{t > t\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 1_{\{t > t\}} P(\mathbf{t} \geq T \mid \mathcal{G}_T, \{\mathbf{t} > t\}) \\
&= 1_{\{t > t\}} \frac{P(\{\mathbf{t} \geq T\} \cap \{\mathbf{t} > t\} \mid \mathcal{G}_T)}{P(\mathbf{t} > t \mid \mathcal{G}_T)} \\
&= 1_{\{t > t\}} \frac{P(\mathbf{t} \geq T \mid \mathcal{G}_T)}{P(\mathbf{t} > t \mid \mathcal{G}_T)} \\
&= 1_{\{t > t\}} \exp\left\{-\int_t^T \mathbf{I}_s ds\right\}
\end{aligned}$$

ただし、式中の条件 $\{t \leq t\}$ は、 $\mathcal{H}_t = \mathbf{s}(1_{\{t \leq s\}} : 0 \leq s \leq t)$ の部分族で、 $1_{\{t \leq t\}} = 1$ を満たすものである。数学的には $\{t \leq t\} = \{H \in \mathcal{H}_t : \forall \mathbf{w} \in H, \mathbf{t}(\mathbf{w}) \leq t\}$ と表すことができる。 $\{t > t\}$ も、同様に、 $\{t > t\} = \{H \in \mathcal{H}_t : \forall \mathbf{w} \in H, \mathbf{t}(\mathbf{w}) > t\}$ と表される。

(証明終)

(1) (4.3)式の証明

$$E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X 1_{\{t > T\}} \mid \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > t\}} E[\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X \mid \mathcal{G}_t] \quad (4.3)$$

(証明)

$$\begin{aligned}
E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X 1_{\{t > T\}} \mid \mathcal{F}_t] &= E[E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X 1_{\{t > T\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad (\because \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t \subset \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t) \\
&= E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X E[1_{\{t > T\}} \mid \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] \mid \mathcal{F}_t] \\
&= E[\exp\{-\int_t^T r_s ds\} X 1_{\{t > t\}} \exp\{-\int_t^T \mathbf{I}_s ds\} \mid \mathcal{F}_t] \quad (\because 4.4) \\
&= 1_{\{t > t\}} E[\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X \mid \mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

最後の条件付き期待値 $E[\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X \mid \mathcal{F}_t]$ では、期待値の条件を \mathcal{G}_t に交換することができる。まず、 $E[\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X \mid \mathcal{G}_t \vee \mathbf{s}(E_1)]$ を考える。

$\mathbf{s}(\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X) \vee \mathcal{G}_t$ と $\mathbf{s}(E_1)$ が独立である¹²ことから、

¹² $\mathbf{s}(\exp\{-\int_t^T (r_s + \mathbf{I}_s) ds\} X) \vee \mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_T$ であるが、定義より \mathcal{G}_T と $\mathbf{s}(E_1)$ は独立なので、

$$E[\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X | \mathcal{G}_t \vee \mathbf{s}(E_1)] = E[\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X | \mathcal{G}_t] \quad (4.5)$$

である。また、

$$\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t \subset \mathcal{G}_t \vee \mathbf{s}(E_1) \quad (4.6)$$

であるので¹³、結局、

$$E[\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X | \mathcal{F}_t] = E[\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X | \mathcal{G}_t]$$

が成立する。以上より(4.1)式が示された。

(証明終)

(2) (4.2)式の証明

$$E[\int_t^T \exp\{-\int_s^u r_u du\} Y_s 1_{\{t>s\}} ds | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t>t\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u + I_u) du\} Y_s ds | \mathcal{G}_t] \quad (4.2)$$

(証明)

$$\begin{aligned} & E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{t>s\}} ds | \mathcal{F}_t] \\ &= E[E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{t>s\}} ds | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] | \mathcal{F}_t] \\ &= E[\int_t^T E[\exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s 1_{\{t>s\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] ds | \mathcal{F}_t] \\ &= E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Y_s E[1_{\{t>s\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] ds | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

($E[1_{\{t>s\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = 1_{\{t>t\}} \exp\{-\int_t^s I_u du\}$ が(4.4)式と同様にして示

$\mathbf{s}(\exp\{-\int_t^T (r_s + I_s) ds\} X) \vee \mathcal{G}_t$ と $\mathbf{s}(E_1)$ も独立である。

¹³ (4.6)式は以下のように示される。デフォルト時刻 t の定義(3.7)式から、 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq t}$ と E_1 の値が一意に決まると、 $\{1_{\{t \leq s\}}\}_{0 \leq s \leq t}$ も一意に決まることがわかる。このことから、 $\mathcal{H}_t = \mathbf{s}(1_{\{t \leq s\}})_{0 \leq s \leq t}$ は $\mathbf{s}(X_s)_{0 \leq s \leq t} \vee \mathbf{s}(E_1) = \mathcal{G}_t \vee \mathbf{s}(E_1)$ -可測であり、 $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ も同様である。したがって、 $\mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t$ の要素はすべて $\mathcal{G}_t \vee \mathbf{s}(E_1)$ に含まれている。

されるので、)

$$\begin{aligned}
 &= E\left[\int_t^T \exp\left\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\right\} Y_s 1_{\{t>t\}} ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
 &= 1_{\{t>t\}} E\left[\int_t^T \exp\left\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\right\} Y_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]
 \end{aligned}$$

($s(\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\} Y_s ds) \vee \mathcal{G}_t$) と $s(E_1)$ が独立であるので、

(4.1)式の証明の後半と同様に、フィルトレーションの交換ができて、)

$$= 1_{\{t>t\}} E\left[\int_t^T \exp\left\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\right\} Y_s ds \mid \mathcal{G}_t\right]$$

(証明終)

(3) (4.3)式の証明

(4.3)式を証明する前に、以下の準備をしておく。まず、デフォルト過程を N_t と表記する。すなわち $N_t \equiv 1_{\{t \leq \tau\}}$ である。このとき、

$$M_t = N_t - \int_0^t \mathbf{I}_s 1_{\{t>s\}} ds$$

で表される確率過程 $\{M_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールであることが知られている (ドゥーブ-マイヤー分解)¹⁴。この関係は、

$$dN_t = dM_t + 1_{\{t>\tau\}} \mathbf{I}_t dt$$

のように微分形で書くことができる。

これを利用して、(4.3)式を示す。

$$E\left[\exp\left\{-\int_t^t r_s ds\right\} Z_t 1_{\{t<t \leq T\}} \mid \mathcal{F}_t\right] = 1_{\{t>t\}} E\left[\int_t^T \exp\left\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\right\} Z_s \mathbf{I}_s ds \mid \mathcal{G}_t\right] \tag{4.3}$$

(証明)

¹⁴ 青沼・中川[1999]あるいは確率過程の標準的な教科書を参照。

(4.3)式左辺の期待値演算子の中の要素は、

$$\exp\{-\int_t^t r_u du\} Z_t 1_{\{t < t \leq T\}} = \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dN_s$$

のように積分形で書き直すことができる。この積分形に先のドゥーブ - マイヤー分解を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dN_s &= \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s \\ &\quad + \int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \mathbf{I}_s 1_{\{t > s\}} ds \end{aligned}$$

となる。この式の右辺第1項は、 $\{M_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールであることから、

$\{\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s\}$ も $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールで、

$$\begin{aligned} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s \mid \mathcal{F}_t] &= E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s dM_s \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって(4.3)式は、

$$\begin{aligned} E[\exp\{-\int_t^t r_s ds\} Z_t 1_{\{t > t\}} \mid \mathcal{F}_t] &= E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \mathbf{I}_s 1_{\{t > s\}} ds \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \int_t^T E[\exp\{-\int_t^s r_u du\} Z_s \mathbf{I}_s 1_{\{t > s\}} \mid \mathcal{F}_t] ds \end{aligned}$$

と変形できる。積分の中の条件付き期待値については、 $t \leq s$ であるので、(4.1)式が利用できて、

$$\begin{aligned} E[\exp\{-\int_t^t r_s ds\} Z_t 1_{\{t < t \leq T\}} \mid \mathcal{F}_t] &= \int_t^T 1_{\{t > t\}} E[\exp\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\} Z_s \mathbf{I}_s \mid \mathcal{G}_t] ds \\ &= 1_{\{t > t\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s (r_u + \mathbf{I}_u) du\} Z_s \mathbf{I}_s ds \mid \mathcal{G}_t] \end{aligned}$$

が導かれる。

(証明終)

5 . ダフィー等によるプライシング・モデル

信用リスクのある金融商品のプライシング・モデルについては、ダフィー等によるものを始めとして多くの研究業績がある。ここでは、第4章で示した3種類の基本的な証券のプライシングの考え方をを用いて、実際のプライシングで使用されることが多いダフィー等によるモデル (Duffie and Singleton[1998]) の整理を行う。

5 - 1 ダフィー等の定式化

ある企業が発行する割引債の価格を考える。予め決められた満期 $T (> 0)$ までにこの企業にデフォルトが発生しなかった場合には、満期時点で1円が債券保有者に支払われ、満期までの時刻 $t (0 < t \leq T)$ にデフォルトが発生した場合には、デフォルト時点で $L_t (0 \leq L_t < 1)$ 円だけが支払われるものとする。

ここでも、デフォルト事象に関して第4章と同様の定式化を行う。すなわち、状態変数を $\{X_s\}_{0 \leq s \leq T}$ 、デフォルト時刻を $t (\geq 0)$ として、3つのフィルトレーション

$$\mathcal{G}_t = \mathbf{s}(X_s : 0 \leq s \leq t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\mathcal{H}_t = \mathbf{s}(1_{\{t \leq s\}} : 0 \leq s \leq t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

を定義する。また、無リスク金利 $\{r_t\}$ 、デフォルト時回収額 $\{L_t\}$ 及びデフォルトの強度 $\{I_t\}$ をそれぞれ $\{\mathcal{G}_t\}$ -適度な確率過程とし、期待値計算はリスク中立測度で行うものとする。

このとき、上述の割引債の時刻 $t (0 \leq t \leq T)$ における理論価格 $q(t, T)$ は、

$$q(t, T) = E[1_{\{t < T\}} \exp\{-\int_t^T r_u du\} L_t + 1_{\{t > T\}} \exp\{-\int_t^T r_u du\} | \mathcal{F}_t] \quad (5.1)$$

のように条件付き期待値の形で表すことができる。ここで、期待値の中の第1項は、デフォルトが発生した場合に回収される L 円の割引価値を表し、第2項は、デフォルトが発生しなかった場合に満期に償還される1円の割引価値を表す。

この価格式は次のようにして、第4章で解説した3つの基本的な証券に対応させることができる。まず、右辺の第1項は、デフォルト時の支払を表すので、第4章の3番目の証券に対応させて、

$$E[1_{\{t < \tau \leq T\}} \exp\{-\int_t^{\tau} r_u du\} L_{\tau} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > \tau\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s R_u du\} L_s I_s ds | \mathcal{G}_t]$$

と整理できる。また、第2項は、デフォルトが発生しなかった場合の満期での支払を表すので、1番目の証券に対応させて、

$$E[1_{\{t > T\}} \exp\{-\int_t^T r_u du\} | \mathcal{F}_t] = 1_{\{t > T\}} E[\exp\{-\int_t^T R_u du\} | \mathcal{G}_t]$$

となる。ただし、 $R_u = r_u + I_u$ とおいた。したがって、(5.1)式は

$$q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s R_u du\} L_s I_s ds + \exp\{-\int_t^T R_u du\} | \mathcal{G}_t] \quad (5.2)$$

と計算される。

ダフィー等はさらに、回収率 d_t を、「デフォルト直前の債券価格 / デフォルト時の回収額」と定義し、幾つかの条件の下で(5.2)式が

$$q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} E[\exp\{-\int_t^T (r_u + (1 - d_u) I_u) du\} | \mathcal{G}_t] \quad (5.3)$$

と変形できることを示した(略証は次節参照)。

(5.3)式の興味深い点は、回収率やデフォルト強度が無リスク金利過程と独立であると仮定した場合に、デフォルトのある割引債の理論価格とデフォルトのない割引債の理論価格の関係が明示的に示される点である。すなわち、(5.3)式の右辺は、

$$q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} E[\exp\{-\int_t^T r_u du\} \times \exp\{-\int_t^T (1 - d_u) I_u du\} | \mathcal{G}_t]$$

と変形できるが、無リスク金利と回収率・デフォルト強度が独立であれば、積の期待値が期待値の積に等しく、

$$q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} E[\exp\{-\int_t^T r_u du\} | \mathcal{G}_t] \times E[\exp\{-\int_t^T (1 - d_u) I_u du\} | \mathcal{G}_t]$$

となる。一方、満期 T に1円が支払われるデフォルトのない割引債の時点 t にお

ける理論価格 $S^0(t, T)$ が

$$S^0(t, T) = E[\exp\{-\int_t^T r_u du\} | \mathcal{G}_t]$$

と表されることから、デフォルトのある割引債の理論価格は、デフォルトのない割引債の理論価格と回収率及びデフォルト強度を使って

$$q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} E[\exp\{-\int_t^T (1 - d_u) I_u du\} | \mathcal{G}_t] S^0(t, T)$$

と書ける。

このように、ダフィー等のプライシング・モデルは、基本的に第4章で示した考え方に含まれることがわかる。ただし、ダフィー等はやや特殊な回収率の定義を導入することによって、(5.3)式に示されているように数式を幾分簡単な形に整理することに成功している。

5 - 2 (5.3)式の証明の概略

(5.3)式の証明の概略を以下に示す¹⁵。

まず、 $\{\mathcal{G}_t\}$ -適当な確率過程 $\{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を、

$$Y_t = E[\int_t^T \exp\{-\int_t^s R_u du\} L_s I_s ds + \exp\{-\int_t^T R_u du\} | \mathcal{G}_t] \quad (5.4)$$

と定義すると、 $q(t, T) = 1_{\{t > \tau\}} Y_t$ である。 $\lim_{\Delta t \downarrow 0} q(t - \Delta t, T) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} 1_{\{t > t - \Delta t\}} Y_{t - \Delta t} = Y_t$ である

るので、 Y_t はデフォルト直前の割引債の理論価格を表しているものと考えることができる。

また、 $\{\mathcal{G}_t\}$ -適当な確率過程 $\{Z_t\}$ を

$$Z_t = E[\int_0^T \exp\{-\int_0^s R_u du\} L_s I_s ds + \exp\{-\int_0^T R_u du\} | \mathcal{G}_t] \quad (5.5)$$

とおくと、 $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq T}$ は $\{\mathcal{G}_t\}$ - マルチンゲールである¹⁶。また、回収率 d_t を

¹⁵ 本節は、青沼・中川[1999]を参考にした。

¹⁶ Z_t の条件付き期待値の中身に注目する。ここには時刻 t が含まれておらず、確率過程

$$\mathbf{d}_t = \frac{L_t}{Y_t}$$

と定義すると、(5.4)式、(5.5)式から、 Y_t と Z_t の間に

$$\exp\{-\int_0^t R_u du\} Y_t = Z_t - \int_0^t \exp\{-\int_0^s R_u du\} Y_s \mathbf{d}_s \mathbf{I}_s ds \quad (5.6)$$

という関係が成立する。さらに $\{\mathcal{G}_t\}$ -適当な確率過程 $\{V_t\}_{0 \leq t \leq T}$ を

$$V_t = \exp\{\int_0^t \mathbf{d}_u \mathbf{I}_u du\} \exp\{-\int_0^t R_u du\} Y_t$$

と定義すると、(5.6)式などを使って、

$$dV_t = \exp\{\int_0^t \mathbf{d}_u \mathbf{I}_u du\} dZ_t \quad (5.7)$$

が示される。 $\{Z_t\}$ が $\{\mathcal{G}_t\}$ -マルチンゲールであることから、 $\{V_t\}$ は $\{\mathcal{G}_t\}$ -ローカル・マルチンゲールであることがわかる。ここで $E[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t|] < \infty$ を仮定すると、 $\{V_t\}$ は $\{\mathcal{G}_t\}$ -マルチンゲールである¹⁷。したがって、

$$V_t = E[V_T | \mathcal{G}_t]$$

が成立する。 $Y_T = 1$ は、 $\{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$ の定義 ((5.4)式) より直ちに導かれ、

$$V_T = \exp\{-\int_0^T (r_u + (1 - \mathbf{d}_u) \mathbf{I}_u) du\}$$

であるので、

$$V_t = E[\exp\{-\int_0^T (r_u + (1 - \mathbf{d}_u) \mathbf{I}_u) du\} | \mathcal{G}_t] = \exp\{-\int_0^t (r_u + (1 - \mathbf{d}_u) \mathbf{I}_u) du\} Y_t$$

より

$\{R_s\}, \{L_s\}, \{I_s\}$ の 0 から T までの積分から構成されている。これらの積分がすべて \mathcal{G}_T -可測であることを考えると、 Z_t の条件付き期待値の中身は (確率過程でなく) \mathcal{G}_T -可測な確率変数と考えることができる。 \mathcal{G}_T -可測な確率変数の \mathcal{G}_t ($0 \leq t \leq T$) に関する条件付き期待値は $\{\mathcal{G}_t\}$ -適当な確率過程であり、かつマルチンゲールであることが知られている。このことから、 $\{Z_t\}$ はマルチンゲールであることがわかる。このような種類のマルチンゲールはドゥープのマルチンゲールと呼ばれている (例えば、森村・木島[1991]を参照)。

¹⁷ 例えば、森村・木島[1991]を参照。

$$Y_t = E[\exp\{-\int_t^T (r_u + (1-d_u)I_u)du\} | \mathcal{G}_t]$$

が求まる。

したがって、

$$q(t, T) = 1_{\{t > t\}} Y_t = 1_{\{t > t\}} E[\exp\{-\int_t^T (r_u + (1-d_u)I_u)du\} | \mathcal{G}_t]$$

が導かれる。これによって、ダフィー等が示した信用リスクのある金融商品（割引債）の価格を表現する(5.3)式が成立することが示された。

6 . 結語

本稿では、デフォルト事象をコックス過程の枠組みで捉えた場合に、信用リスクのある金融商品の価格がどのように記述できるかをランドの定式化に従って解説した。そこでは、3つの基本的証券を定義し、それらの理論価格を無リスク金利過程とデフォルトの強度過程を使って数学的に記述する枠組みが示された。この枠組みは、無裁定条件と金融市場の完備性の下での信用リスクのある金融商品のプライシング理論を理解する上で有用であると言える。

一方、信用リスクのある金融商品のプライシングを実際に行う場合には、実務上の制約（データの制約等）から、理論モデルに何らかの仮定を置くことでモデルを扱い易くすることが多い。この意味で、本稿で解説したような理論モデルがそのまま使用されることはほとんどない。しかし、本稿で示したようなプライシング理論を数学的内容を含めて理解しておくことは、こうした実務上の制約や各種仮定がモデルの扱いに与える影響等を認識・評価するためには重要であると考えられる。

以 上

(補論) 確率過程論の用語集

本論の数学的な議論の理解の一助として、確率過程論の用語集を添付する。さらなる詳細については、楠岡[1998]などの教科書を参照されたい。

Ω : 標本空間

試行の結果起こり得る事象全体の集合。 Ω の要素は ω と表記される場合が多い。

\mathcal{F} : 事象群 (σ -加法族)

Ω の部分集合の族で、以下の3つの性質

$$\bullet \Omega \in \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\bullet A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \tag{2}$$

$$\bullet A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \tag{3}$$

を満たすもの。事象群は、これらの性質を満たしさえすればよいので、1つしか存在しないとは限らない。このような性質を満たす部分集合の族 \mathcal{F} を σ -加法族と呼ぶ。

部分集合の族から生成される最小の σ -加法族

標本空間 Ω とその部分集合の族 $C = \{A_i \subset \Omega : i = 1, 2, \dots\}$ が与えられたとき、 C の要素及び Ω に対し“ c ”(補集合をとる)、“ \cup ”、の操作を可算回繰り返して得られる集合全体の族を $\sigma(C)$ と書く。 $\sigma(C)$ は σ -加法族の性質(1)~(3)を満たし、「 C から生成される最小の σ -加法族」と呼ばれる。(「最小」というのは、この要素のうち1つでも欠けると σ -加法族としての性質を満たさなくなってしまうということ。)

(例： $C = \{A\}$ のとき、 $\sigma(C) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$)

C の要素数は非可算でもよい。

P : 確率測度

\mathcal{F} の要素 (すなわち Ω の部分集合) から実数への写像で 3 つの性質

$$\bullet A \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (4)$$

$$\bullet P(\Omega) = 1 \quad (5)$$

$$\bullet A_i \cap A_j = \emptyset, (i \neq j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (6)$$

を満たすもの。確率測度はこれらを満たしさえすればよいので、1 つしか存在しないとは限らない。

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

(Ω, \mathcal{F}, P) を合せて確率空間と呼ぶ。

X : 確率変数

Ω の要素 ω から実数への関数で、任意の実数 x に対して、

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad (7)$$

を満たすもの。

確率変数 X から生成される最小の σ -加法族

Ω の部分集合 $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ の族から生成される最小の σ -加法族。上述の「部分集合の族から生成される最小の σ -加法族」に準ずる表現を使うと

$$\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{\{\omega : X(\omega) \leq x\} : x \in R\}) \quad (8)$$

のように定義される。すなわち $\sigma(X)$ は、 $X : \Omega \mapsto R$ を確率変数として定義できる最小の σ -加法族である。

可測

Ω 上の σ -加法族 \mathcal{G} について、確率変数 X が \mathcal{G} -可測であるとは、 $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$ であることをいう。

σ -加法族の独立

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ を \mathcal{F} の部分 σ -加法族とする。 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ が独立であるとは、 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ の任意の要素 $g_1 (\in \mathcal{G}_1), g_2 (\in \mathcal{G}_2)$ について

$$P(g_1 \cap g_2) = P(g_1)P(g_2) \quad (9)$$

が成立することである。

確率変数の独立

「2 つの確率変数 X_1, X_2 が独立」とは、 X_1, X_2 それぞれより生成される最小の σ -加法族 $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ が独立であることである。

分布関数

単調非減少な関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ が確率変数 X の分布関数であるとは、

$$F(x) = P(\{\omega: X(\omega) \leq x\}) \quad (10)$$

を満たすことである。

確率変数の期待値

確率変数 X の測度 P による期待値 $E[X]$ は、

$$E[X] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) \quad (11)$$

で定義される。

条件付き期待値

X を \mathcal{F} -可測な確率変数とする。 X の $\mathcal{G}(\subseteq \mathcal{F})$ に関する条件付き期待値は、 \mathcal{G} の任意の要素 g に対し、

$$E[Y1_g] = E[X1_g] \quad (12)$$

あるいは

$$\int_g Y dP = \int_g X dP \quad (13)$$

を満たす \mathcal{G} -可測な確率変数 Y として定義され、 $Y = E[X | \mathcal{G}]$ と表記される。ただし、 1_g は \mathcal{G} -可測な確率変数で、

$$1_g(\omega) = \begin{cases} 0, & (\omega \notin g) \\ 1, & (\omega \in g) \end{cases} \quad (14)$$

で定義される。このような確率変数 Y は、一意に存在することが知られている。

確率過程

Ω の要素 ω と時刻 $t \in [0, \infty)$ から実数への関数で、 ω を一つ与えたときの軌跡 $X_t(\omega)$ が右連続左極限であるもの。すなわち、すべての $t \in [0, \infty)$ について $X_t(\omega)$, $\lim_{\Delta t \downarrow 0} X_{t+\Delta t}(\omega)$ が、すべての $t \in (0, \infty)$ について $\lim_{\Delta t \uparrow 0} X_{t+\Delta t}(\omega)$ が、それぞれ存在し、 $X_t = \lim_{\Delta t \downarrow 0} X_{t+\Delta t}(\omega)$ を満たすもの。

確率過程 $X_t(\cdot)$ に $t \in [0, \infty)$ を与えたときの X_t は確率変数である。

フィルトレーション

\mathcal{F} -加法族の増大列、すなわち、 $0 \leq s < t < \infty \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t (\subseteq \mathcal{F})$ を満たすような $\{\mathcal{F}_t; t \in [0, \infty)\}$ をフィルトレーションという。

適合

確率過程 $X_s(\cdot)$ に時刻 $t \in [0, \infty)$ を与えた確率変数 X_t がすべての $t \in [0, \infty)$ について \mathcal{F}_t -可測であるとき、確率過程 $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合であるという。

確率過程 $\{X_s\}_{0 \leq s \leq t}$ から生成される最小の s -加法族

すべての X_s ($0 \leq s \leq t$) を可測にするような最小の s -加法族 $\mathfrak{s}(X_s : 0 \leq s \leq t)$ と表記する。 $0 \leq t \leq T$ について、 $\mathcal{F}_t = \mathfrak{s}(X_s : 0 \leq s \leq t)$ とすると、 $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ はフィルトレーションで、 $\{X_t\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合である。

マルチンゲール

フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ において、 $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合な確率過程 $\{M_t\}$ がすべての $0 \leq s < t < \infty$ に対して

$$E[|M_t|] < \infty \quad (15)$$

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad (16)$$

を満たすとき、 $\{M_t\}$ は $(P, \{\mathcal{F}_t\})$ -マルチンゲールであるという (確率測度 P が明らかでない場合には単純に $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールと表記することもある)。

停止時

確率変数 t が、すべての $t \in [0, \infty)$ について

$$\{\omega : t(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad (17)$$

を満たすとき、 t を停止時という。ただし、 \mathcal{F}_t はフィルトレーション。

ローカル・マルチンゲール

$\{M_{t \wedge t_n}\}$ がマルチンゲールになるような、停止時の列 $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \uparrow \infty$ が存在するとき、 $\{M_t\}$ をローカル・マルチンゲールという。ただし、実数 a, b に対し、 $a \wedge b = \min(a, b)$ 。なお、マルチンゲールならばローカル・マルチンゲールである。

(参考文献)

- 青沼 君明・中川 秀敏、「クレジット・デリバティブの評価モデル」、Private Communication、1999年
- 小田 信之、「信用リスクを反映した金融商品のプライシング」、『金融研究』第18巻第1号、日本銀行金融研究所、1999年3月
- 楠岡 成雄、「確率と確率過程」(岩波講座 応用数学[基礎13])、岩波書店、1998年
- 森村 秀典・木島 正明、「ファイナンスのための確率過程」、日科技連、1991年
- Aonuma, Kimiaki and Hidetoshi Nakagawa, “Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-Type Hazard Rate Model,” *mimeo*.
- Duffee, Gregory, “Treasury Yields and Corporate Bond Yields Spreads: An Empirical Analysis,” Working paper, Federal Reserve Board, 1996.
- Duffie, Darrell. and Kenneth J. Singleton, “Modeling Term Structures of Defaultable Bonds,” *Review of Financial Studies*, 12, 1999.
- Harrison, M. and S. Pliska, “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading,” *Stochastic Processes and Their Application*, 11, 1981.
- Lando, David: “On Cox Processes and Credit Risky Securities,” Working paper, Department of Operations Research, University of Copenhagen, 1998.