IMES DISCUSSION PAPER SERIES

バリュー・アット・リスクの
リスク指標としての妥当性について

―― 理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析 ――

やまい やすひろ　よしば としなお
山井康浩・吉羽要直

Discussion Paper No. 2000-J-29

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES

BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱30号

IMES Discussion Paper Series 2000-J-29

2000 年 11 月

バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について

―― 理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析 ――

やまい やすひろ　よしば としなお

山井康浩・吉羽要直

要　旨

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、金融機関のリスク管理実務で最も標準的なリスク指標となっているが、そのリスク指標としての妥当性に関しては、学界から定義上・理論上の問題点（損益額分布の形状によっては、①VaR が信頼区間外のリスクを捉えられないこと、②VaR が劣加法性を満たさないこと）が指摘されている。こうした中、VaR が抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念が提唱されている。

本稿は、VaR と期待ショートフォールとの比較分析に関するこれまでの研究成果を、特に VaR が信頼区間外のリスクを捉えられない問題点（テイル・リスク）に焦点を当て、具体的な数値例を用いて解説する。ここでは、VaR がミスリーディングな情報を投資家に与え、期待効用を最大化する投資家に信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを与える可能性があることが示される。一方、期待ショートフォールはこうした問題を内包せず概念上 VaR よりも優れたリスク指標であることが示される。

もっとも、期待ショートフォールの応用に際しては、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が残されていることから、今後も当面はリスク管理実務において VaR が中心的役割を果していくと考えられる。VaR をリスク指標として用いる場合はその問題点が特に顕著となる状況に特に注意し、デスク･レベルでの肌目細かいリスク管理や与信集中度合いの把握・制限などの補完的対応を図ることによりリスク・プロファイルの把握に努めることが重要となる。

キーワード：バリュー・アット・リスク、期待ショートフォール、テイル・リスク、劣加法性

JEL classification: G20

* 日本銀行金融研究所研究第１課(E-mail: yasuhiro.yamai@boj.or.jp, toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

本稿の作成にあたっては、今野浩教授（東京工業大学）から大変貴重なコメントを頂戴した。もっとも、本稿で示された意見やあり得べき誤りは、すべて筆者個人に属する。

（目　次）

1　はじめに

バリュー・アット・リスク（以下、VaR）は、その概念的な分かり易さ、計算の簡便さ、およびポートフォリオ分析への応用可能性の高さなどから、金融機関のリスク管理実務で最も標準的に使用されるリスク指標となっている。しかしながら、VaR のリスク指標としての妥当性に関しては、ここ数年、学界から Artzner, et al.[1997]を始めとする定義上・理論上の問題点（損益額分布の形状によっては、①VaR が信頼区間外のリスクを捉えられないこと、②VaR が劣加法性[1]を満たさないこと）が指摘されており、実務界でもこうした問題点が意識され始めている[2]。

こうした中、チューリッヒ連邦工科大学のデルバエン等は、VaR が抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールという概念を提唱した[3]（Artzner, et al.[1997]）。期待ショートフォールとは、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値と定義される。この定義によれば、期待ショートフォールは、上記①の問題点を内包しないし、理論的に劣加法性を満たしていることが導かれるので、②の問題点もない。このような性質から、期待ショートフォールは、VaR を代替するないし補完する可能性があるリスク指標として、学界・実務界の関心を呼び、積極的な議論が行なわれている。

1　あるリスク指標 ρ が劣加法性を満たすとは、全体のポジションのリスク量が個別ポジションのリスク量の和を下回ることを指す。直感的には、「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減を織込むべきである」という要請を定式化したものであると考えられる。つまり、二つの個別ポジションの損益額を表わす確率変数をそれぞれ X 、Y とすると、以下の不等式が任意の X 、Y について成立する時、リスク指標 ρ は劣加法性を満たすという。

$$\rho(X)+\rho(Y)\geq\rho(X+Y)$$

2　VaR の理論的な問題点については、Artzner, et al.[1999]、Basak and Shapiro[1999]、Danielsson[2000]、Rootzén and Klüppelberg[1999]等で指摘されている。

　また、実務界からは、以下のようにリスク指標としての VaR の実務上の問題点を指摘する意見が示されている（日本銀行金融研究所[2000]）。

> 「例えば、信頼区間 99%の VaR によりリスク管理を行う場合、信頼区間外で 1%の確率で発生する損失の規模は VaR では測定できない。これはリスク計測手法として VaR を用いることによる問題点として注意する必要がある。」

3　期待ショートフォールの考え方を紹介したものとしては、Artzner, et al.[1999]のほか、Kim and Mina[2000]、Ulmer[2000] 、森本[2000]、リスク管理モデルに関する研究会[1999]等が挙げられる。

本稿は、学界だけではなく実務界等の幅広い読者層を想定し、VaR と期待ショートフォールとの比較分析に関するこれまでの研究成果を、金融機関におけるリスク管理実務の観点から整理した解説資料である[4]。特に、これまでの議論の焦点となっている VaR の二つの問題点のうちテイル・リスクの問題について、具体的な数値例などにより詳しく解説することに主眼を置いている。

本稿での主な結論は以下のとおりである。

① VaR には、信頼区間外のリスクを捉えられないという問題点がある。その結果、ミスリーディングな情報を投資家に与え、期待効用を最大化する投資家に信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを与える可能性がある。

② 一方、期待ショートフォールは信頼区間外のリスクも織込むことが出来るため、投資家にミスリーディングな情報を与える可能性が低く、概念上 VaR に比べて優れたリスク指標である。

③ しかし、期待ショートフォールを実務に応用するには、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が存在し、今後これを解決していく必要がある。

本稿の構成は以下のとおりである。２章では、VaR と期待ショートフォールの定義とそれら二つのリスク指標が持つ意味を簡単に説明する。３章では、金融商品の損益額が正規分布に従うことが仮定し得る場合とそうでない場合における、二つのリスク指標の性質の説明を行う形で、Artzner, et al.[1997]による VaR に対する批判を紹介し、その批判に対する著者の考えを述べる。４章では、VaR が信頼区間外のリスクを捉えられないことによる問題点を、具体的な数値例を用いて詳述し、期待ショートフォールが概念上 VaR に比べ優れたリスク指標であることを示す。５章では期待ショートフォールの実務への応用可能性について、VaR との比較分析により検討を行う。ここでは、期待ショートフォールの応用に際しては、推計値の安定性確保やバックテスティング手法の確立といった課題が残されていることが指摘される。６章では、引き続き VaR をリスク指標として用いる際の留意点を列挙し、７章で結論を簡単に述べる。

[4] 期待ショートフォールと VaR との比較研究は、ポートフォリオ最適化への応用可能性に関する分野でも最近目覚しい成果が挙がっている（Rockafeller and Uryasev [2000]）。しかし、本稿では、金融機関が抱えるリスクの計測・管理へのインプリケーションを引き出すことに主眼を置くこととし、主にポートフォリオ運用業務への応用を念頭に置いていると考えられるポートフォリオ最適化に関する研究成果の詳細には立ち入らない。

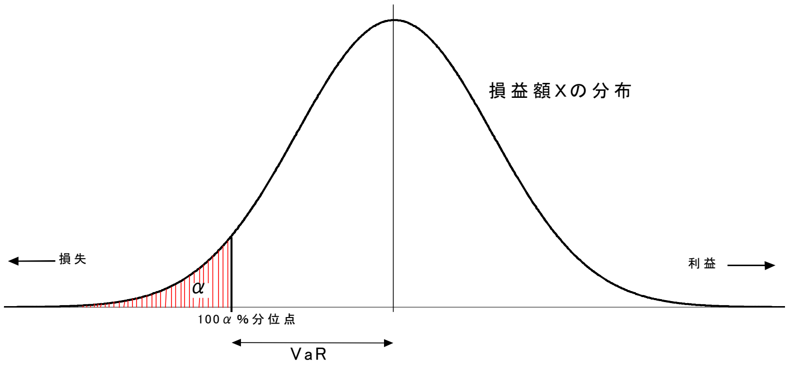
2　バリュー・アット・リスクと期待ショートフォール

本章では、VaR と期待ショートフォールの定義とそれら二つのリスク指標が持つ意味を簡単に説明する。

(1) バリュー・アット・リスクの定義

VaR は、一般的に、「金融商品のポートフォリオから一定の確率で保有期間中に発生し得る最大損失額」として定義される。すなわち、数学的には、VaR は損益額分布の下側$100\alpha\%$分位点（quantile）として定義される[5]。

図表 1　損益額分布とＶａＲ



(2) 期待ショートフォールの定義

デルバエン等は、リスク指標として、期待ショートフォール（Expected Shortfall ＜この他、Conditional VaR、Mean Excess Loss、Beyond VaR、Tail VaR などとも呼

5　Artzner, et al.[1999]が採用した定義を用いると、信頼水準$100(1-\alpha)\%$のバリュー・アット・リスク$VaR_\alpha(X)$は、ポジションの損益額をXとして、

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x | P[X \le x] > \alpha\}$$

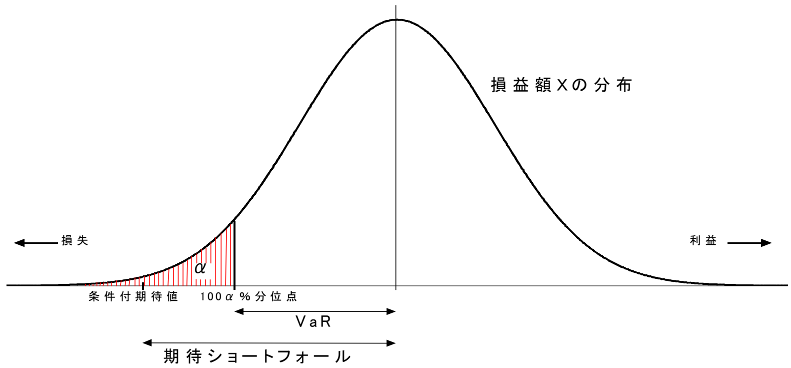
となる。ここで、$\inf\{x | A\}$は事象Aが成立する条件下でのxの下限であり、$\inf\{x | P[X \le x] > \alpha\}$は損益額分布の下側$100\alpha\%$分位点を表わす（この表現方法により、損益額分布が離散的な場合にも対応できる）。ここでは、損失額は負値（利益額は正値）であることから、損失が発生する際の VaR を正値にするため分位点に－1 を乗じている。

なお、この定義では、信頼区間の範囲内では損失が発生しないようなポートフォリオの場合、$100\alpha\%$分位点が正となり VaR が負になる可能性がある。

ばれる＞）の概念を提唱した（Artzner, et al.[1997]）[6]。期待ショートフォールとは、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値である（図表 2参照）。具体的な定義は以下のとおりである。

> **期待ショートフォールの定義**
> 金融商品のポートフォリオの損益額を表わす確率変数を X 、信頼水準 100(1−α)% の VaR を $VaR_\alpha(X)$ とすると、これに対応する期待ショートフォール $ES_\alpha(X)$ は以下のように定義される[7]。
>
> $$ES_\alpha(X) = E[-X \mid -X \geq VaR_\alpha(X)]. \qquad (1)$$

図表 2 損益額分布、ＶａＲと期待ショートフォール



[6] 期待ショートフォールとほぼ同様の考え方に基づくリスク指標が、Artzner, et al.[1997]に先立つ 20 年前に Fishburn[1977]で示されている。具体的には、下式のように損益額の閾値（t）を下回る範囲での損益額分布のモーメント（次数をγで表す）を使った一般的な形で議論が展開されている（期待ショートフォールは、次数を$\gamma=1$、閾値を$t=-VaR$として、これを(1－信頼水準)で割った値に VaR を加えたものに相当）。ただし、Fishburn[1977]では、後述する特定のリスク指標が持つ劣加法性やテイル・リスクといった観点からの分析は加えられていない。

$$F_\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^\gamma dF(x) \qquad \gamma > 0$$

ただし、$F(x)$は損益額を表わす確率変数xの分布関数、tは閾値、γはモーメントの次数。

[7] $E[x \mid B]$は事象Bが成立する条件の下での確率変数xの条件付き期待値である。VaR を超える範囲内では通常損益額 X は負値であることから、この損益額に−1 を乗じた$-X$ は正値となる。

（３）VaR、期待ショートフォールを用いた所要自己資本算出

イ． VaR

自社の全ポートフォリオのリスクをカバーするための所要自己資本の算出にVaR を用いることは、金融機関の内部管理では非常にポピュラーであるほか、自己資本規制でも一部採用されている。これは、「信頼水準$100(1-\alpha)\%$の VaR を予め与えられた自己資本の範囲内に収める」ことをメルクマールとすることが、「損失額が自己資本を上回り自社が倒産する確率を$100\alpha\%$以内に抑える」ことと等しいので、所要自己資本の算出根拠としての意味付けを理解し易いことに起因していると考えられる。

ロ． 期待ショートフォール

一方、期待ショートフォールは、「VaR の信頼区間外における損失額の条件付期待値」、つまり「損失が VaR を超える場合に平均的にどの程度の損失を被るか」を表す。したがって、「信頼水準$100(1-\alpha)\%$の VaR を超えて発生する損失額の平均値を自己資本によりカバーする」形で所要自己資本を算出することは、“ VaR ≤ 期待ショートフォール ”という関係があるので、VaR の場合に比較して多目の自己資本を必要とすることを意味する。したがって、期待ショートフォールは VaR に比べて保守的な所要自己資本の算出を行うことを意味する。

ただし、通常の損益額分布では、期待ショートフォールが分布の下側何%分位点に当たるかを事前に知ることはできない。したがって、期待ショートフォール自体を所要自己資本算出の根拠とすると、VaR に基づくリスク管理のように「ある確率水準を予め定め、自社が倒産する確率をその水準以内に抑える」という意味付けは出来なくなる。

３　分布の非正規性と VaR の問題点

デルバエン等は、損益額分布が正規分布と異なる度合いが強くなると、VaR の 2 つの問題点（分布の形状によっては、①信頼区間外のリスクを捉えられないこと、②劣加法性を満たさないこと）がクローズアップされることを示した（Artzner, et al.[1997]）。本章では、それら２つの問題点についての解説を行なう。

(１) 損益額が正規分布に従う場合の VaR に基づくリスク計測

損益額が正規分布に従う場合、期待ショートフォールは分布の標準偏差の定数倍となる（VaR は標準偏差の定数倍で表されるので、期待ショートフォールは VaR の定数倍でもある[8]）。例えば、信頼水準 99%では、VaR は標準偏差の 2.33 倍となり、期待ショートフォールは標準偏差の 2.67 倍となる。つまり、VaR を計算すれば自動的に期待ショートフォールを求めることが出来る。したがって、損益額が正規分布に従う場合には、VaR を計算することで VaR を超える損失額に関する情報（損失額の条件付期待値）が得られるので、デルバエン等が指摘した①の問題は当てはまらないことがわかる。また、②の問題もこの場合には該当しないことが次の様に確認できる。２種類の異なる資産からなるポートフォリオ（例えば、株と為替からなるポートフォリオ）を考えよう。さらに、２つの資産の損益額が正規分布に従うと仮定する。そうすると、各々の資産の標

---

[8] 損益額が正規分布に従う場合、期待ショートフォールが標準偏差の定数倍となることは以下のように示される。

$$ES_\alpha(X) = E[-X \mid -X \geq VaR_\alpha(X)] = \frac{E[-X \cdot I_{\{X \leq -VaR_\alpha(X)\}}]}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X)} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}}\left[-\sigma_X^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}}\right]_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X)} = \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{VaR_\alpha(X)^2}{2\sigma_X^2}} = \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q_\alpha^2\sigma_X^2}{2\sigma_X^2}} = \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}}\sigma_X$$

ただし、$I_{\{A\}}$ は、A が真の時に１、偽の時に０をとる定義関数、q_α は、標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 分位点である。

例えば、信頼水準 99%では、この式より期待ショートフォールは標準偏差の 2.67 倍となるが、これは信頼水準を 99.6%とした時の VaR に相当する。

準偏差の和とポートフォリオの標準偏差を比較すると、前者は後者以上となる[9]。さて、この場合、VaR は標準偏差の定数倍で表されるので、各々の資産の VaR の和はポートフォリオの VaR 以上となる。したがって、損益額が正規分布に従う場合には、VaR について劣加法性が成立する[10]。

(2) 損益額が正規分布に従わない場合の VaR に基づくリスク計測 ― デルバエン等の VaR に対する批判

損益額が正規分布以外の分布に従う場合は、期待ショートフォールを分布の標準偏差等の関数として表すことは一般的には出来ない。したがって、その場合の期待ショートフォールは、VaR とは独立に求める必要がある。このことは、期待ショートフォールだけでなく、VaR 以上の損失額についての任意の情報にも当てはまる。つまり、VaR のみを求めても、VaR 以上の損失額に関する情報（その一例が期待ショートフォール）は一般的には得られないことになる（上記①の問題点）。

さらに、損益額が正規分布以外の一般の分布に従う場合に、VaR について常に劣加法性が成立するか否かはアプリオリには与えられない。すなわち、分布の形状によっては、劣加法性が成立しない可能性があり、全体のポジションの VaR が個別ポジションの VaR の総和を上回るという事態が生じ得る（上記②の問題点）。

デルバエン等のリスク指標としての VaR に対する批判は、これら①、②の問題点である（Artzner, et al.[1997]）が、実際にこうした問題が顕現化する具体例

9　2 つの確率変数が標準偏差を持つ時、その標準偏差が劣加法性を満たすことは以下のように示すことが出来る。

確率変数 X 、Y の標準偏差を σ_X 、σ_Y 、X と Y の共分散を σ_{XY} とすると、相関係数は 1 以下（$\sigma_{XY} \le \sigma_X \sigma_Y$）であるため（証明は、竹内[1963]＜第 4 章 p. 37＞参照）、確率変数 $X+Y$ の標準偏差 σ_{X+Y} について、以下のように劣加法性が満たされる。

$$\sigma_{X+Y} \equiv \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}} \le \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_X \sigma_Y} = \sigma_X + \sigma_Y .$$

10　実際には、損益額分布（分散が存在するとする）が楕円分布族（楕円分布族の定義等詳細は池田[2000]第 3 章を参照）に含まれる場合には、VaR が劣加法性を満たすことが、Embrechts, et al. [1999]によって示されている（正規分布や t-分布、パレート分布なども楕円分布族に含まれる）。しかし、ここでは説明の簡便化のために、損益額が正規分布に従うか否かで場合分けを行い劣加法性について論じることとする。

として、デルバエン等は、デジタル・オプションのショート・ポジションの例と、大口与信がある場合の信用リスク計測の例の２つを挙げている（Artzner, et al.[1999]）。

（例１）デジタル・オプション[11]のショート・ポジション

株価を原資産とし同一の満期を持つ二つのヨーロピアン・デジタル・オプションを考える。オプション A（当初のプレミアムuドル）では、満期での株価がUを上回った時のみオプションの売り手は買い手に 1,000 ドル支払う。オプション B（当初のプレミアムlドル）では、満期での株価がL（ここでは$L<U$と仮定する）を下回った時のみオプションの売り手は買い手に 1,000 ドルを支払う。オプションのペイオフは原資産価格の非線形関数であることからも明らかなように、オプションの損益額分布は、原資産の損益額分布が正規分布であったとしても、正規分布とはならない。

さて、行使価格L（U）を各々満期時点の原資産価格が下回る（上回る）確率が 0.8%となるように定める。オプション A を１単位売っているトレーダーA とオプション B を 1 単位売っているトレーダーB を考える。トレーダーA の信頼水準 99%の VaR を計算すると、株価がUを上回り 1,000 ドルの支払が生じる確率が 0.8%と信頼水準の範囲に入らないため、この損失は最大損失額としては認識されず、当初の受取プレミアムのみが考慮されて VaR（オプション A）は$-u$ドルとなる[12]。一方、トレーダーB の信頼水準 99%の VaR（オプション B）も、同様の理由から$-l$ドルとなる。

図表 3　デジタル・オプションのペイ・オフと VaR

株価	確率	オプション A	オプション B	オプション A+B
$S_T < L$	*0.8%*	u	$-1{,}000+l$	$-1{,}000+u+l$
$L \leq S_T \leq U$	*98.4%*	u	l	$u+l$
$U < S_T$	*0.8%*	$-1{,}000+u$	l	$-1{,}000+u+l$
		$VaR = -u$	$VaR = -l$	$VaR = 1{,}000-u-l$

このように、満期時点の株価水準によっては 1,000 ドルの損失（受取プレミアムは除く）を余儀なくされるリスクが 99%信頼水準の VaR では全く考慮されないことになる。

また、オプション A とオプション B のポジションを合算した場合、株価がL

[11] 通常のオプションは原資産価格が権利行使価格を上回った（下回った）ときに、その差額を受け取る権利であるのに対し、デジタル・オプションは原資産価格が権利行使価格を上回った（下回った）ときに、予め定められた原資産価格に依存しない一定額を受け取る権利である。

[12] 脚注5を参照。ここでは、99%の信頼水準の範囲内ではuの利益が保証されているため、VaR は負値となる。

を下回るまたはUを上回る確率は 1.6%となり VaR の信頼水準内に入ってくるため、合算ポジションの VaR（オプション A+B）は $1000-u-l$ ドルとなる。したがって、VaR（オプション A）＋VaR（オプション B）＝$-u-l$ であることを用いると、VaR（オプション A+B）＞VaR（オプション A）＋VaR（オプション B）となり、この場合の VaR は劣加法性をも満たしていないことがわかる。

（例２）大口与信がある場合の信用リスク計測

市場に 100 銘柄の１年物社債（いずれもクーポンは 2%）が存在し、複利利回り（2%）、デフォルト率（1%）、デフォルト時の回収率（ゼロ）は満期まで一定であると仮定する[13]。また、それぞれの社債のデフォルト事象は独立に発生するとの仮定も置く。

まず、100 本の社債に分けて 1 万ドルずつ計 100 万ドル投資する場合を考える。この場合、１年間に少なくとも 2 つ以上の社債がデフォルトして当該ポートフォリオに損失が発生する[14]確率は約 26%（＝1－全ての社債がデフォルトしない確率－１つの社債のみデフォルトする確率$=1-0.99^{100}-100\cdot 0.99^{99}\cdot 0.01$）であることから、信頼水準 95%の VaR は正となることは明らかである。一方、１つの社債に 100 万ドル投資する場合を考えると、この社債にデフォルトが発生して損失を被る確率は 1%であるため、信頼水準 95%の VaR はクーポン収入を考慮した－2 万ドルとなり、リスクはないとして認識されてしまう。このように、前者の分散化ポートフォリオのリスクが、後者の集中化ポートフォリオのそれを上回ることになり、この場合でも VaR の劣加法性は満たされない。

（3）期待ショートフォールによるリスク計測 ― デルバエン等の主張

上述のように、期待ショートフォールは、信頼区間外の損失を平均値の形で取り込んでおり、信頼区間の外の情報を把握している。また、期待ショートフォールは、基本的に劣加法性を満たすという性質を持つと指摘されている[15]（Artzner, et al.[1997]、 Artzner, et al.[1999]、 Pflug[2000]）。

---

[13] この仮定により、社債保有時の損失は、社債が保有期間中にデフォルトした場合にのみ発生することとなる。

[14] 2 つの社債がデフォルトした場合、デフォルトがない場合のクーポン収入の合計 20,000 ドルに対して、デフォルトにより未回収となる金額はクーポン部分も含めると 20,400 ドルとなることから、ネット損失額は 400 ドルとなる。3 つ以上の社債がデフォルトした場合はネット損失額はさらに拡大する。

[15] 期待ショートフォールが劣加法性を満たすことについては、Pflug[2000]が期待ショートフォールの凸性と正の同次性を用いて簡潔に証明を行っている。

こうしたことから、デルバエン等は、損益額分布の非正規性が顕著な状況では、リスク指標として VaR を用いることには問題があり、リスク管理上より優れた性質（信頼区間外のリスクを織込んでいる、劣加法性を満たす）を持った期待ショートフォールを用いるべきであると結論付けている（Artzner, et al.[1997]）。

（4）デルバエン等の主張に対する著者の考え

ここでは、デルバエン等による VaR に対する批判について、金融機関におけるリスク管理実務の観点（規制当局の観点を含む）からみた著者の考え方を述べる。予め著者の考え方のエッセンスを纏めると以下のとおりである。

「まず、劣加法性を満たすか否かという点は、リスク管理実務の観点からすれば、リスク管理担当者の考え方によって、その重要性は変わり得る。

一方、VaR が信頼区間外の事象を捉えられないという点は、①金融機関のソルベンシーが脅かされる状況に関する問題であることに加え、②問題の発生が必ずしも特殊なケースに限られないことから、リスク管理担当者が常に注意を払うべき重要な問題である。」

イ．劣加法性について

VaR のリスク指標としての妥当性を評価する際に注意すべきは、その評価が「何をリスク指標として重視するか」に依存している点である。VaR など単一のリスク指標では、損益額が正規分布に従うことがアプリオリに仮定できない場合、分布の性質の全てを表わすことはできないのは自明である。したがって、VaR など単一のリスク指標を用いることは、リスク管理実務上何らかの問題が生ずる可能性を自ずと内包していることになる。このため、VaR のリスク指標としての妥当性の評価は、こうした可能性が現実化する危険性を考慮しつつ、VaR がリスク管理担当者にとってリスク管理実務上重要であるリスクを十分に捉えているか否かによって行われるべきものである。

こうした観点に立つと、あるリスク指標が（２）節で示したデジタル・オプションの例のように劣加法性を満たしていない場合もあり得るが、このようにリスク指標が劣加法性を満たさない場合があるからといって、そのリスク指標

を用いるべきではないと単純に結論づけることはできないと考えられる[16]。例えば、総資産1億円のある企業が、資産を全額換金した上、新たに債券に投資する場合のリスクを考える。投資対象は、東京の地震災害による損害にリンクした災害リンク債[17]A とロス・アンジェルスの地震災害による損害にリンクした災害リンク債 B であるとする。この際、企業経営者は、1 億円すべてを災害リンク債 A に投資するのと、50 百万円ずつを災害リンク債 A、B にそれぞれ投資するのとどちらのリスクが高いと考えるのが妥当であろうか。企業経営者にとって劣加法性（分散投資によるリスク量の削減）が望ましいとすると、投資が集中している前者の方がハイリスクであるという結果になる。しかし、仮に投資を行う企業の自己資本が 50 百万円以下で、企業経営者が「自己資本が払底して自社が倒産する」ことをリスクと捉えるならば、後者の方が自社が倒産する確率が高い（東京で巨大地震が発生する確率よりも、東京またはロス・アンジェルスで巨大地震が発生する確率の方が高い[18]）という意味で、ハイリスクであると判断されることとなろう。こうした場合、劣加法性は経営陣にとってあまり意味を持たないであろう。

一方で、劣加法性の問題が極めて重要となる局面も考えられる。例えば Artzner, et al.[1997]が例として挙げたように、オプション等の金融取引所が VaR を基準に取引証拠金の算定を行う場合、VaR の劣加法性が成立しない状況では、投資家は単純に口座を分割することで必要証拠金を容易に削減することができる。これは差入証拠金を少なくする抜け穴を投資家に提供していると考えることもでき、取引所の立場からは回避すべき事象であるとする考え方も有り得る。さらに、単純に部署毎の VaR を合算してこれを「保守的に見積もられた」会社全体の VaR とするやり方は、劣加法性が満たされない場合は必ずしも保守的ではなくなってしまう（単純合算した VaR が会社全体の真の VaR を下回るケースが存在するため）。こうした場合は VaR が劣加法性を満たさない問題は重要である。

16　Rootzén and Klüppelberg [1999]も同様の主張を行っている。

17　災害リンク債とは、災害による損害を補償する再保険を組込んだ債券を指す。投資家から見ると、再保険料相当額がクーポンに組込まれるため、通常の債券に比べ高いクーポンを得ることができる。ただし、予め定められた災害が発生した場合には、投資家に対して元本の一部または全部の償還が行われない。

18　例えば、東京、ロス・アンジェルスで大地震が発生する確率はそれぞれ 1%で独立であるとすると、「少なくとも東京またはロス・アンジェルスのどちらかで大地震が発生する確率」は約 2%となる。

ロ．VaR が信頼区間外の事象を捉えられない点

一方、VaR が信頼区間外の事象を捉えられない点は、リスク管理上極めて重要であり、この問題は、金融機関のソルベンシーが脅かされるような状況に関心の高い金融機関のリスク管理担当者および規制・監督当局にとっては極めて重要な関心事項である[19]。

このため、本稿では以下、損益額分布が正規分布ではない場合に VaR が持つとされる問題点のうち、信頼区間外の事象を捉えられない点に焦点を当て、これまでの既存研究のサーベイを交えて考察を進めることとする。

４ VaR のテイル・リスク

VaR の問題点に関する既存研究（Basak and Shapiro[1999]、Klüppelberg and Korn[1998]、Lotz[1999]）[20]は、VaR が信頼区間外の事象を捉えられないことに伴う問題点として、以下の２点を指摘している。

① VaR が一定値以下となるようリスク管理を行ったとしても、信頼区間外の損失が大きくなる場合があるという意味で、VaR がリスクに関するミスリーディングな情報を投資家に与える場合があること。

② 特にこの場合、VaR に基づくリスク管理は、信頼区間の外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的な投資家（期待効用を最大化する投資家）に与える可能性があること。

また、これらの研究では、こうした問題点がオプションを含むポートフォリオおよび与信ポートフォリオで発生する可能性があることが示されている。

---

19 日本銀行金融研究所[2000]および BIS・グローバル金融システム委員会[2000]参照。また、例えばグリーンスパンは、この点に関連して、“In estimating necessary risk capital, the primary concern should be to address those disturbances that occasionally do stress institutional insolvency—the negative tail of the loss distribution that is so central to modern risk management.” と述べている（Alan Greenspan [2000]参照）。

20 Basak and Shapiro[1999]の詳細については、本章の(３)節参照。Lotz[1999]は、各資産のデフォルト事象がポアソン過程に従う与信ポートフォリオを対象に考察を行い、投資家が VaR を最小化するようポートフォリオを組み替えた場合、期待ショートフォールは逆に増大する可能性があることを示した。

BIS・グローバル金融システム委員会[2000]でも、VaR が信頼区間外における損失を把握できないリスクを「テイル・リスク」として指摘し、ストレス･テストを行う必要性の一つの根拠として挙げている。本稿でも以下、この VaR が信頼区間外の損失を把握できないリスクを一般的に「テイル・リスク」と呼ぶこととする。

以下では、３つの事例（オプション・ポートフォリオ、与信ポートフォリオ、株式・債券に対する動学的ポートフォリオ投資）により VaR のテイル・リスクの問題点について説明する。

(１) オプション・ポートフォリオとテイル・リスク（具体例１）

ここでは、単純なヨーロピアン・オプションを例に用いてテイル・リスクの説明を行う。この例では、ポートフォリオにオプション性のあるポジションが含まれた場合の、①テイル・リスクが発生するメカニズム、②VaR によるリスク管理がテイル・リスクを増大させるインセンティヴを与えるメカニズム、の二つを説明する。

まずモデルの説明を行う。ここでは、計算の簡単化のために、投資家の投資対象が特定の株式を原資産とするヨーロピアン・プット・オプション（満期１年）のショート・ポジションに限定されており、オプション売却に伴う受取プレミアムは無リスク金利で運用すると仮定する。投資家は、このヨーロピアン・プットのショート･ポジションにおいて、行使価格と売却量を操作変数として投資の意思決定を行う。また、原資産の現在価格を 100 ドル、年率ボラティリティを 30%とする。株価過程は 1/30 年をワン･ステップとした離散的な２項ツリー過程（現実の価格上昇確率を 0.6 と仮定）に従うとする。また、無リスク金利は 5.00%とする。このヨーロピアン・オプションのプレミアムは、オプションのペイ･オフのリスク中立確率による期待値を無リスク金利により割引いた値となる。

このポジションの最終利益は、当初に受取るオプション・プレミアムの無リスク金利での運用益とオプションの最終的なペイ･オフの合計となる。したがって、行使価格を K とするプット・オプションのプレミアムを $p(K)$、状態 i での株価を S_i、その状態が発生する現実の確率を P_i、オプションの売却量を x とし、

投資家の効用関数 $u(W)$ を対数型、すなわち、$u(W) = \ln W$ とすると、投資家の期待効用 $E[u(W)]$ は以下のように表わすことができる[21]（ただし、投資家は当初3,000 ドルの現金資産を持っているとする）。

$$E[u(W)] = \sum P_i \cdot \ln\{W_0 + x \cdot e^r \cdot p(K) - x \cdot \max[K - S_i, 0]\}. \qquad (2)$$

W ：終期における資産価値

W_0 ：初期における資産価値

また、VaR は株価の下側 α% 分位点における損失額として得ることができる[22]。また、期待ショートフォールも、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値として得ることができる。

以下の 5 つの最適化問題を解くことで、VaR および期待ショートフォールによるリスク管理が投資家の最適化行動に与える影響を分析した[23]。

① リスク管理指標による制約なし

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)].$$

② 信頼水準 95%の VaR を 5 ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$

subject to　VaR (信頼水準 95%) ≤ 5 ドル.

③ 信頼水準 95%の期待ショートフォールを 7 ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$

subject to　期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ(信頼水準 95%) ≤ 7 ドル.

④ 信頼水準 99%の VaR を 5 ドル以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$

subject to　VaR (信頼水準 99%) ≤ 5 ドル.

⑤ 信頼水準 99%の期待ショートフォールを 7 ドル以内に抑えるとの制約

21　ここで $E[\cdot]$ は現実の確率の下での期待値を表わす演算子である。

22　このモデルでは損益額分布が離散的であるため、累積確率分布における累積確率がちょうど5%となる事象は存在しない。したがって、脚注5の定義により、VaR に相当する事象を、累積確率分布において累積確率が 5%を超えた直後の事象にとって VaR の計算を行っている。

23　ここでは、行使価格の上・下限をこの 2 項ツリーモデル上で株価が取り得る値の範囲である35～288 ドルに設定した。また、期待効用関数を対数型と仮定していることから、ポートフォリオ価値が負値とならない制約――オプションの売却量の上限を 60 とする――を置いた。

$$\max_{\{x,K\}} E[u(W)],$$
subject to　期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ(信頼水準 99%) ≤ 7 ドル.

これら最適化の結果を図表 4および図表 5に示した。まず、制約がない場合（①）の最適ポジションは、ディープ・イン・ザ・マネー（現在の株価 100 ドルに対して行使価格 288 ドル）のオプションを 21 単位売却するポジションとなった。

一方、信頼水準 95%の VaR を一定額以内に抑える制約の下（②）では、最適ポジションは、ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションを 60 単位売却するポジションとなった。行使価格（72 ドル）は VaR の信頼区間の範囲内で大幅な損失が発生しないように信頼区間の外（株価 72 ドル以下）の水準に選ばれる。一方、オプションの売却量は、プレミアム稼得のために制約なしの場合に比べて多くなっており、この結果、信頼区間の外で大幅な損失が発生するポジションとなっていることが分かる（図表 6参照）。つまり、VaR を一定金額以内に抑えるという制約が課された場合、合理的な投資家にとって、信頼区間外で大幅な損失が生じるポジションが最適なポジションとなる[24]。この間、信頼水準 95%の期待ショートフォールを一定額以内に抑える制約の下（③）では、株価下落時のペイ・オフの条件付期待値を一定以上にするとの制約から、ディープ・イン・ザ・マネーのプット・オプション（行使価格 288 ドル）をごく少額売却するという極めてリスクの小さいポジションとなっている。

一方、信頼区間を 99％に引上げた場合の VaR を一定額に抑える制約の下（④）では、②の場合に比べて行使価格が VaR の信頼区間より外側に引下げられた（売却量は不変）。したがって、このオプション・ポジションの場合、VaR の信頼水準を引上げるだけではテイル・リスクを回避することはできないこととなる（図表 7参照）。

こうした状況は、図表 8と図表 9に掲げた損益額の累積確率分布[25]をみるとより明らかになる。VaR による制約が課された状況では制約がない場合に比べて、分布のサイド（分布の中心部分と裾部分の間）が薄くなり平常時の損失が抑えられることにより VaR が引下げられる一方、分布の裾が厚くなり VaR の信頼区

---

[24] Ahn, et al.[1999]でも、オプション・ポジションの VaR を最小化した場合、そのポジションはアウト・オブ・ザ・マネーのオプションのショート･ポジションから構成されることが示されている。

[25] 図を見やすくするため、信頼水準 95%の場合のみ累積確率分布をプロットした。

間外での損失が拡大していることが分かる。

図表 4　各リスク管理方法下でのポートフォリオのプロファイル（信頼水準 95%）

		制約なし（①）	VaR によるリスク管理*（②）	期待ショートフォールによるリスク管理**（③）
ポジションの性質	売却量	21	60	0.23
	行使価格	288	72	288
リスク指標（単位：ドル）	VaR	570	5	6
	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ	643	213	7

* 信頼水準 95%の VaR が 5.0 以下となるように最適化を実施。

** 信頼水準 95%の期待ショートフォールが 7.0 以下となるように最適化を実施。

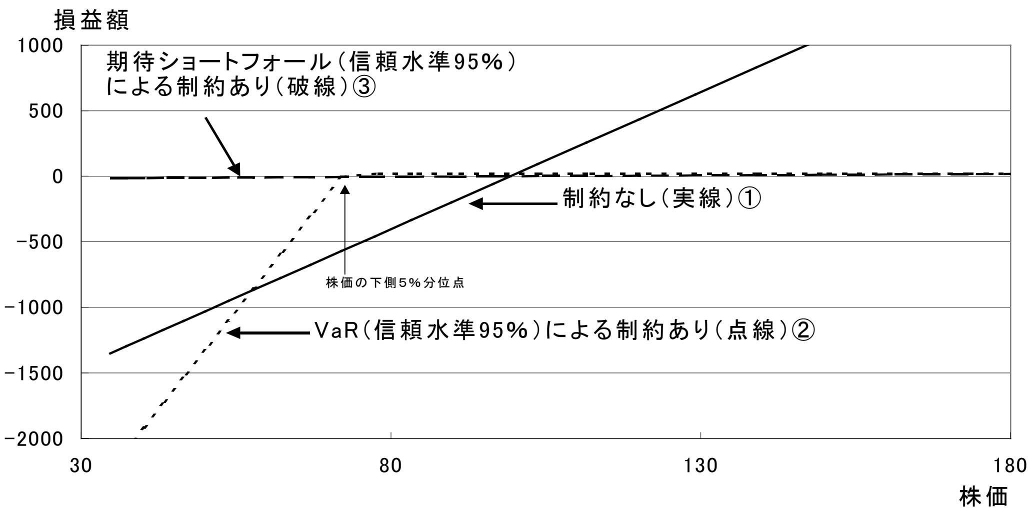
図表 5　各リスク管理方法下でのポートフォリオのプロファイル（信頼水準 99%）

		制約なし（①）	VaR によるリスク管理*（④）	期待ショートフォールによるリスク管理**（⑤）
ポジションの性質	売却量	21	60	0.18
	行使価格	288	62	288
リスク指標（単位：ドル）	VaR	774	5	7
	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ	816	123	7

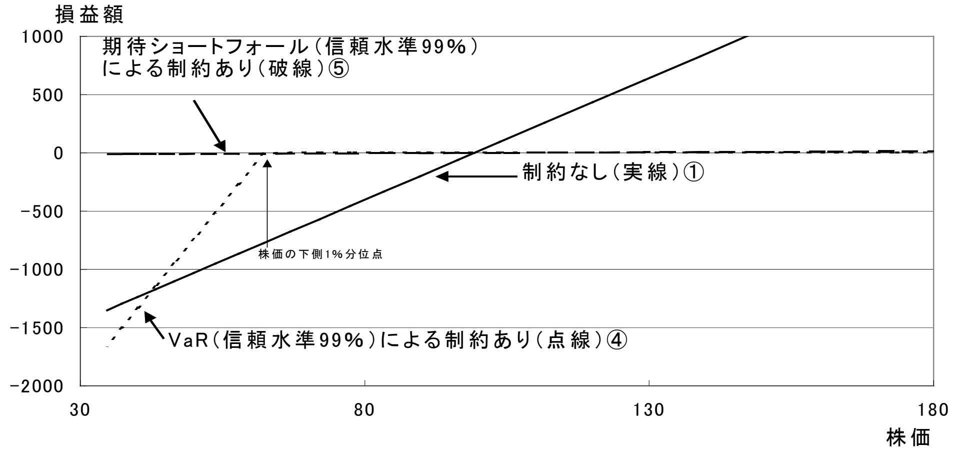
* 信頼水準 99%の VaR が 5.0 以下となるように最適化を実施。

** 信頼水準 99%の期待ショートフォールが 7.0 以下となるように最適化を実施。

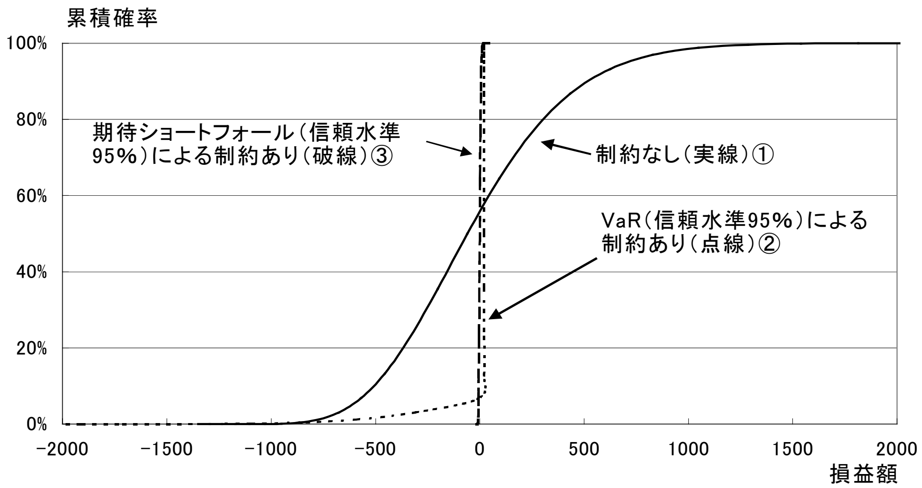
図表 6　各ポートフォリオの株価に対するペイ・オフ（信頼水準 95%）



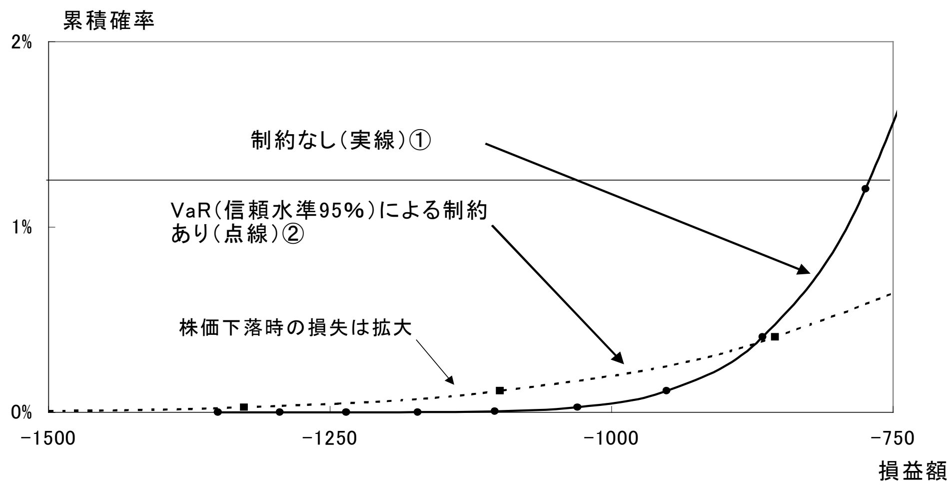
図表 7　各ポートフォリオの株価に対するペイ・オフ（信頼水準 99%）



図表 8　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準 95%）



図表 9　投資家の損益額の累積確率分布：左裾部分の拡大図（信頼水準 95%）



(2) 与信集中とテイル・リスク（具体例２）

次に、与信ポートフォリオでも、テイル・リスクの問題が発生することをモデルを用いて示す。このモデルでは、与信ポートフォリオの損益額分布の非正規性が顕著なためにテイル・リスクが発生する。特に、与信ポートフォリオでは、与信の集中がリスク量を決める重要なファクターとなることが示される。

まず、モデルの説明を行う。ここでは、投資家が図表 10に挙げられた 4 種類の証券（①デフォルト率 4.0%の 1 種類の債券のみからなる集中化ポートフォリオ A、②デフォルト率 0.5%の 1 種類の債券のみからなる集中化ポートフォリオ B、③デフォルト率 5.0%の 100 種類の債券からなる分散化ポートフォリオ、④安全資産）に保有資産 100 百万円を投資するとしよう。ここでは、簡単のため各債券の満期を１年で、デフォルト事象発生は独立であるとし、デフォルト時の回収率は 10%と仮定する。さらに、各債券の複利利回りはクーポンと同水準であり、複利利回り、デフォルト率、回収率は満期まで一定であると仮定する。

図表 10　各与信ポートフォリオのプロファイル

	組入れ債券数	クーポン	デフォルト率*	回収率
集中化ポート A	1	4.75%	4.00%	10%
集中化ポート B	1	0.75%	0.50%	10%
分散化ポート	100	5.50%	5.00%	10%
安全資産	1	0.25%	0.00%	——

*　全てのデフォルト事象は独立に発生すると仮定。

集中化ポートフォリオ A･B ともにデフォルトを起こさず、かつ分散化ポートフォリオの債券が n だけデフォルトする確率[26]は、$0.96 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$、集中化ポートフォリオ A・B ともにデフォルトを起こし、かつ分散化ポートフォリオの債券がnだけデフォルトする確率は、$0.04 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$として表わされる。したがって、投資家の効用関数が対数型であるとすると、期待効用は以下のように表わすことができる。

[26] 集中化ポートフォリオ A がデフォルトを起こさない確率は$0.96(=1-4\%)$、同様に、集中化ポートフォリオ B がデフォルトを起こさない確率は0.995、分散化されたポートの債券がnだけデフォルトする確率は$0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n}$であることから導かれる。ただし、${}_{m}C_{n}$は$m$個から$n$個を選ぶ組み合わせの数である。

$$
\begin{aligned}
E[u(W)] &= \sum_{n=1}^{100} 0.96 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \cdot \ln\begin{pmatrix} 1.0475 \cdot X_1 + 1.0075 \cdot X_2 \\ +1.055 \cdot X_3 \cdot \dfrac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{n=1}^{100} 0.04 \cdot 0.995 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \cdot \ln\begin{pmatrix} 1.0475 \cdot X_1 + 1.0075 \cdot 0.1X_2 \\ +1.055 \cdot X_3 \cdot \dfrac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{n=1}^{100} 0.96 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \cdot \ln\begin{pmatrix} 1.0475 \cdot 0.1X_1 + 1.0075\ X_2 \\ +1.055 \cdot X_3 \cdot \dfrac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{n=1}^{100} 0.04 \cdot 0.005 \cdot 0.05^{n} \cdot 0.95^{100-n} \cdot {}_{100}C_{n} \cdot \ln\begin{pmatrix} 1.0475 \cdot 0.1X_1 + 1.0075 \cdot 0.1X_2 \\ +1.055 \cdot X_3 \cdot \dfrac{100-0.9n}{100} + 1.0025 \cdot (W_0 - X_1 - X_2 - X_3) \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

W ：終期におけるポートフォリオ価値
W_0 ：初期のポートフォリオ価値
X_1 ：集中化ポートフォリオ A への投資額
X_2 ：集中化ポートフォリオ B への投資額
X_3 ：分散化ポートフォリオへの投資額

VaR は以下の手続によって得ることができる。まず、①各事象が発生した時の損益額を降順に並べる。次に、②この損益額の大きいものから小さいものに向かって各事象の発生確率を合計して累積確率を計算する。③この累積確率が信頼水準を超える直前の損益額に-1 を乗じたものを VaR とする。

次に、期待ショートフォールは以下の手続で得ることができる。まず、①損益額に-1 を乗じたものが VaR 以上となる場合を取出し、損益額に-1 を乗じたものと発生確率との積の和をとる。②この和を損失が VaR 以上となる確率で除し、これを期待ショートフォールとする。

ここでは、以下の 5 つの最適化問題を解くことで、VaR および期待ショートフォールによるリスク管理が投資家の最適化行動に与える影響を分析した。

① リスク管理指標による制約なし

$$\max_{\{X_1, X_2, X_3\}} E[u(W)].$$

② 信頼水準 95%の VaR を 3 百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1, X_2, X_3\}} E[u(W)],$$

subject to VaR (信頼水準 95%) $\leq$ 3 百万円.

③ 信頼水準 95%の期待ショートフォールを 3.5 百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1, X_2, X_3\}} E[u(W)],$$

subject to　期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ(信頼水準 95%) $\leq$ 3.5 百万円.

④ 信頼水準 99%の VaR を 3 百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1,X_2,X_3\}} E[u(W)],$$

subject to　*VaR* (信頼水準 99%) $\leq$ 3 百万円.

⑤ 信頼水準 99%の期待ショートフォールを 3.5 百万円以内に抑えるとの制約

$$\max_{\{X_1,X_2,X_3\}} E[u(W)],$$

subject to　期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ(信頼水準 99%) $\leq$ 3.5 百万円.

これら最適化の結果は、図表 11～図表 16に示した。ここでは、制約なしの最適ポートフォリオ（①）との比較により、それぞれの制約の下での最適ポートフォリオの特徴について述べる。

まず、信頼水準 95%の VaR による制約下での最適ポートフォリオ（②）の特徴としては、集中化ポートフォリオ A に対する投資額が大幅に増加している点が挙げられる。このメカニズムは、図表 13および図表 14の累積確率をプロットしたグラフをみることで明らかになる。まず、VaR による制約を受けて、投資家は確率 95%の範囲内で発生する最大損失額を引き下げるため、分散化ポートフォリオに対する投資額を引下げる。ここで投資額引下げに伴い発生した資金は、集中化ポートフォリオか安全資産に投資する必要がある。一方、集中化ポートフォリオ A への投資が VaR に与える影響をみると、そのデフォルト確率が 4%と VaR の信頼区間の範囲外にあるため、集中化ポートフォリオ A への残高を大きくしても VaR の値には大きな影響を与えないことが分かる。したがって、分散化ポートフォリオの残高を減らして得た資金は、より高いリターンを求めて集中化ポートフォリオ A に向かうことになる[27]（図表 11）。この結果、VaR は減少する一方、集中化ポートフォリオ A への投資額が増加した結果、VaR の範囲外で大幅な損失を被る可能性が高まったことになる。つまり、VaR によるリスク管理の導入により、与信集中が促進されたことになる。

一方、期待ショートフォールによる制約を設けた場合（③）は、集中化ポートフォリオへの投資度合いは低下していることが分かる。これは、期待ショー

[27] この結論は、集中化ポートフォリオへの投資損益率如何に依存している。仮に集中化ポートフォリオのクーポンが低い場合は、分散化ポートフォリオの残高を減らして得た資金は安全資産に向けられ、与信集中は進行しない。したがって、VaR によるリスク管理の導入が与信集中を促進するか否かは、投資可能な与信ポートフォリオの投資損益率に依存していることが分かる。

トフォールによる制約が非常に低い確率で発生する損失までも考慮対象にしているため、集中化ポートフォリオへの投資を抑制するインセンティヴを投資家に与えるためである。

さらに、VaR の信頼水準を 99%とした場合（④）、デフォルト確率（4%）が信頼区間の範囲内に入る集中化ポートフォリオ A への投資は大幅に減少している一方、集中化ポートフォリオ B への投資が増大していることが分かる（図表 12）。これは、集中化ポートフォリオ B のデフォルト率が 0.5%と VaR の信頼区間の範囲外にあるために VaR に影響を与えない形で投資が進められたことを示している。さらに、累積確率分布のグラフ（図表 15、図表 16）をみると、VaR によるリスク管理では集中化ポートフォリオ B への投資額増加により低い確率で発生する損失が大幅に増大していること、すなわち、VaR によるテイル・リスクが顕現化していることが分かる。したがって、単純に 95%の信頼水準を 99%に引上げただけではテイル・リスクを把握できないことが分かる。一方、期待ショートフォールによるリスク管理（⑤）では、テイルでの損失は大幅に抑制されており、テイル・リスクは顕現化しないことが分かる。

図表 11　各リスク管理方法での最適ポートフォリオ（信頼水準 95%）

		制約なし（①）	VaR による ﾘｽｸ管理*（②）	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙによ るﾘｽｸ管理**（③）
ポート構成	集中化ﾎﾟｰﾄ A（ﾃﾞﾌｫﾙﾄ率 4%）	7.4%	20.1%	2.9%
	集中化ﾎﾟｰﾄ B（ﾃﾞﾌｫﾙﾄ率 0.5%）	0.0%	0.0%	2.0%
	分散化ポート	92.6%	79.9%	95.1%
	安全資産	0.0%	0.0%	0.0%
リスク指標	VaR	3.35	3.00	2.75
（単位：百万円）	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ	5.26	14.35	3.50

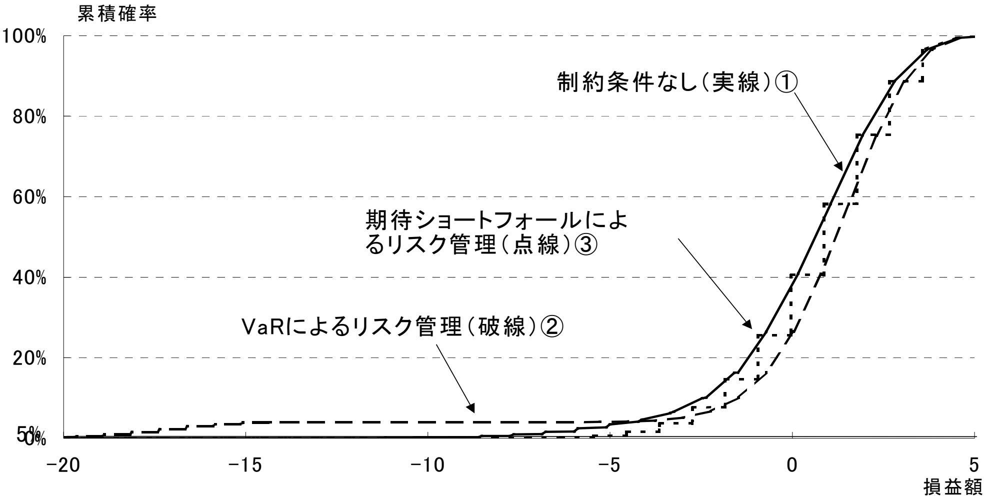
* VaR が 3.0 以下となるように最適化を実施。　** 期待ショートフォールが 3.5 以下となるように最適化を実施。

図表 12　各リスク管理方法での最適ポートフォリオ（信頼水準 99%）

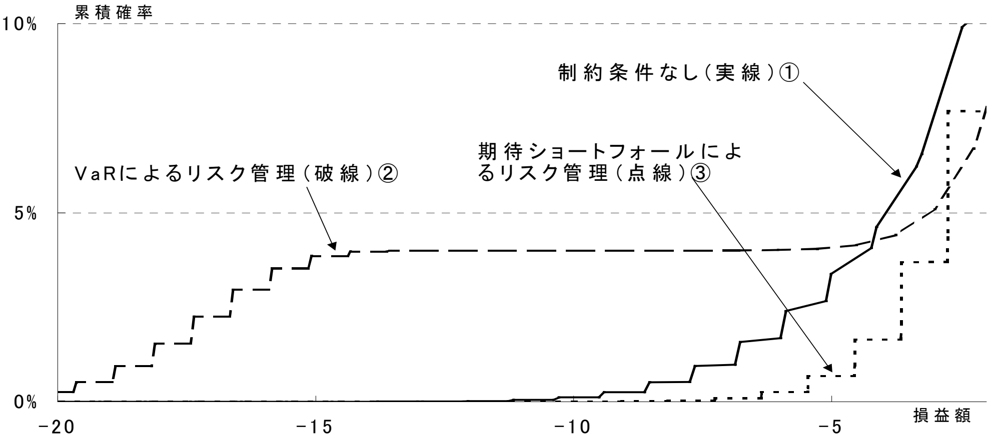
		制約なし（①）	VaR による ﾘｽｸ管理*（④）	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙによる ﾘｽｸ管理**（⑤）
ポート構成	集中化ﾎﾟｰﾄ A（ﾃﾞﾌｫﾙﾄ率 4%）	7.4%	0.7%	0.7%
	集中化ﾎﾟｰﾄ B（ﾃﾞﾌｫﾙﾄ率 0.5%）	0.0%	18.8%	0.5%
	分散化ポート	92.6%	64.9%	65.6%
	安全資産	0.0%	15.6%	33.2%
リスク指標	VaR	6.77	3.00	3.13
（単位：百万円）	期待ｼｮｰﾄﾌｫｰﾙ	7.83	7.33	3.50

* VaR が 3.0 以下となるように最適化を実施。　** 期待ショートフォールが 3.5 以下となるように最適化を実施。

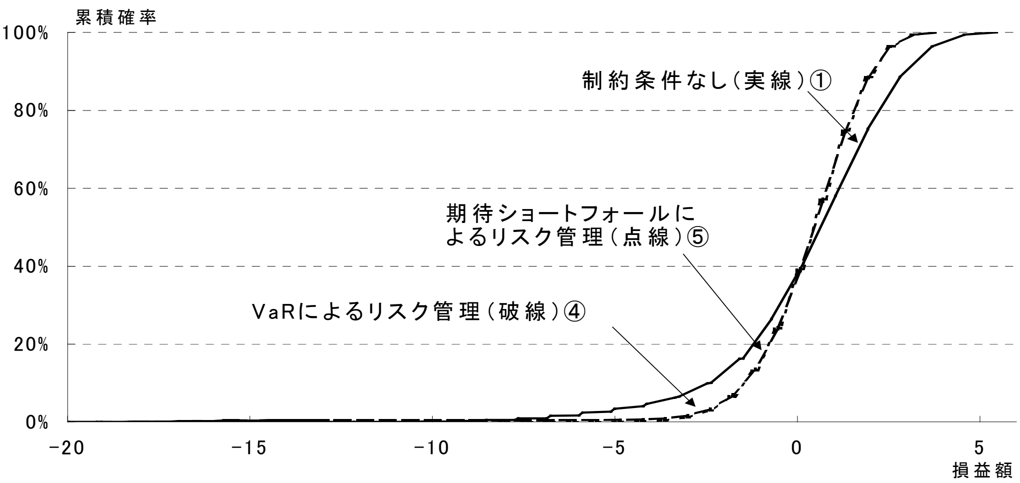
図表 13　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準 95%）



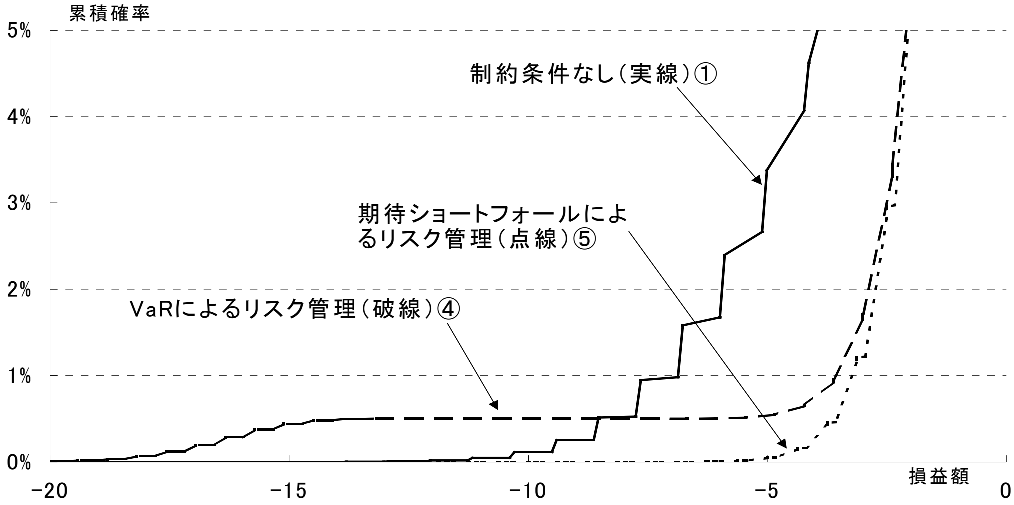
図表 14　損益額の累積確率分布（信頼水準 95%、左裾部分の拡大図）



図表 15　投資家の損益額の累積確率分布（信頼水準 99%）



図表 16　損益額の累積確率分布（信頼水準 99%、左裾部分の拡大図）



ここでは、簡単な例により分析を行なった結果、VaR によるリスク管理が与信の集中を促進し、VaR の信頼区間外での損失を増加させる場合があることが分かった。一方、期待ショートフォールによるリスク管理は、VaR の信頼区間外の損失をもカバーするため、与信の集中により信頼区間外でのリスク・テイクを抑制する効果があることも示された。

(３) 動学的投資戦略におけるテイル・リスク（具体例３）

ここでは、VaR によるテイル・リスク発生の 3 つめの例として、投資家が株式（リスク証券）と債券（安全証券）とを連続時点で動学的に取引を行う場合について、Basak and Shapiro[1999]に従って説明を行う（本節では Basak and Shapiro[1999]の数式などを簡便化して説明を行う[28]が、ややテクニカルな数学的記述も含まれているため、本節をとばして(４)節に進むことも可能である)。

Basak and Shapiro[1999]は、動学的最適化問題を解くことによって、合理的な投資家が VaR に基づくリスク管理を行った場合、VaR の信頼区間外でリスクをとるような投資戦略がこの投資家にとって最適な投資戦略となることを示した。このモデルでは、資産価格が対数正規分布（幾何ブラウン運動）に従うことが

[28] ここでは、直感的な説明を重視しており、解の導出過程の詳細などは省略している。詳細は、Basak and Shapiro[1999]を参照。

仮定されているが、投資家がダイナミックに取引を行うことで非線形のポジションを組んで正規分布に従わない損益分布を生成できることから、テイル・リスクが発生する。

当初（時点$t=0$）資産$W(0)$を保有していた投資家が、最終時点（時点$t=T$）における保有ポートフォリオの価値$W(T)$に依存する期待効用を最大化するケースを考える。投資家の効用関数は対数型であるとし、最終的な保有ポートフォリオの価値$W(T)$を用いて、$u(W(T))=\ln W(T)$で表わされるとする。投資家の効用は最終的な保有ポートフォリオの価値のみによって決められることから、投資家は保有資産を消費するインセンティヴを持たない。また、投資家はこのポートフォリオの資金の引出しおよび追加を一切行わないとする。さらに、投資家は保有資産を連続時点で売買できるものと仮定する。簡単化のため、存在する金融商品は無リスク証券（債券）Bとリスク証券（株式）Sのみであり、それぞれ以下の価格過程に従うと仮定する。

$$dB(t)=B(t)rdt \tag{4}$$

$$dS(t)=S(t)[\mu dt+\sigma dw(t)] \tag{5}$$

ただし、$w(t)$は標準ブラウン過程、r、μ、σは全て定数

ここで、以下の式で表わされる状態価格密度$\xi(t)$を考える。

$$\xi(t)\equiv\exp\left(-\left\{r+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right\}t-\frac{\mu-r}{\sigma}w(t)\right) \tag{6}$$

このとき、投資家が当初の保有資産をすべて債券と株式からなるポートフォリオに運用し、このポートフォリオの資金の引出しあるいは追加を一切行わないという条件（予算制約）を数式で表わすと、以下のようになる。

$$E[\xi(T)W(T)]\le W(0) \tag{7}$$

ここでは、$\xi(T)$は一種のディスカウント・ファクターであると考えることができ、最終的なポートフォリオ価値をこのディスカウント・ファクターで割引いたものの期待値が当初の資産額以下であるという条件が予算制約を表わしていると解釈できる。

したがって、この投資家の最適化問題は以下の形で表わされる。

$$\begin{aligned}&\max_{W(T)} E[\ln W(T)]\\&subject\quad to\quad E[\xi(T)W(T)]\le W(0)\end{aligned} \tag{8}$$

この最適化問題の解は、若干の計算により、次式として得られる。

$$W(T)=\frac{W(0)}{\xi(T)} \tag{9}$$

(5)式、(6)式、(9)式より、$W(T)$は次のようになる。

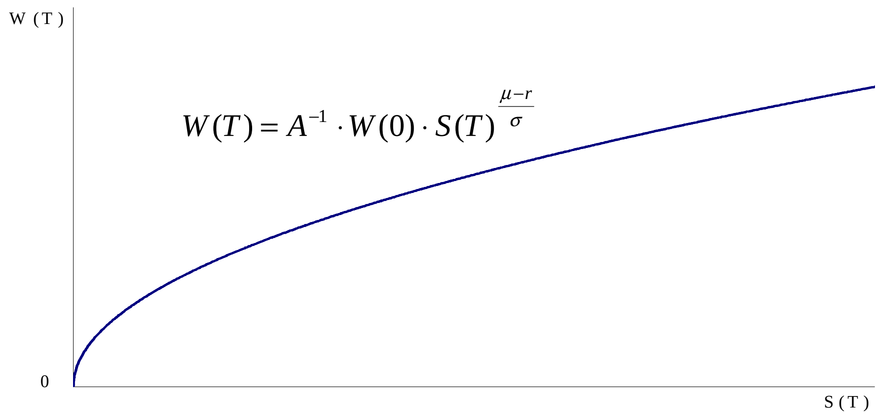
$$W(T)=\frac{W(0)}{\xi(T)}=\frac{W(0)}{A\cdot S(T)^{-\frac{\mu-r}{\sigma}}}=A^{-1}\cdot W(0)\cdot S(T)^{\frac{\mu-r}{\sigma}} \tag{10}$$

ただし、$A>0$は定数

したがって、最適なポートフォリオの T 期での価値は、リスク証券の T 期での価格で表わせることが分かった。これを概念図で表わすと図表 17のようになる。

図表 17　最適ポートフォリオの T 期における価値

縦軸：最適ポートフォリオの T 期における価値、横軸：リスク証券の T 期における価格



ここで、こうした投資家の最適化問題に、VaR に基づくリスク管理を導入することを考える。

VaR は、「保有期間中に一定の確率でポートフォリオに発生し得る最大損失額」として定義される。したがって、信頼水準$100(1-\alpha)\%$の VaR を$VaR(\alpha)$として、この定義を数式で表わすと以下のようになる。

$$P(W(0)-W(T)\leq VaR(\alpha))\equiv 1-\alpha \tag{11}$$

VaR に基づくリスク管理では、(11)式で定義される VaR が自己資本の水準を下回るようにポートフォリオ運営がなされるとする。すなわち、この自己資本の水準を$Capital$として、

$$VaR(\alpha) \le Capital \tag{12}$$

となる。ここで、当初の富の金額$W(0)$から自己資本$Capital$を差引いた金額を$\underline{W}$とする。この$\underline{W}$は、自己資本をすべて使い果たしてしまうような T 期におけるポートフォリオ価値、つまり、これを下回るとデフォルトが発生するポートフォリオ価値を表わしている。これを用いると、(12)の制約式は、

$$VaR(\alpha) \le W(0) - \underline{W} \tag{13}$$

と表わされる。

(11)式および(13)式により、

$$P(W(T) \ge \underline{W}) \ge 1 - \alpha \tag{14}$$

が成立つ。これは、最終的なポートフォリオの価値が自己資本を使い果たしてしまう水準を下回る確率が$100\alpha\%$以下となるようにポートフォリオを運営することを表わしている。したがって、VaR によるリスク管理は、(14)式により表現される。

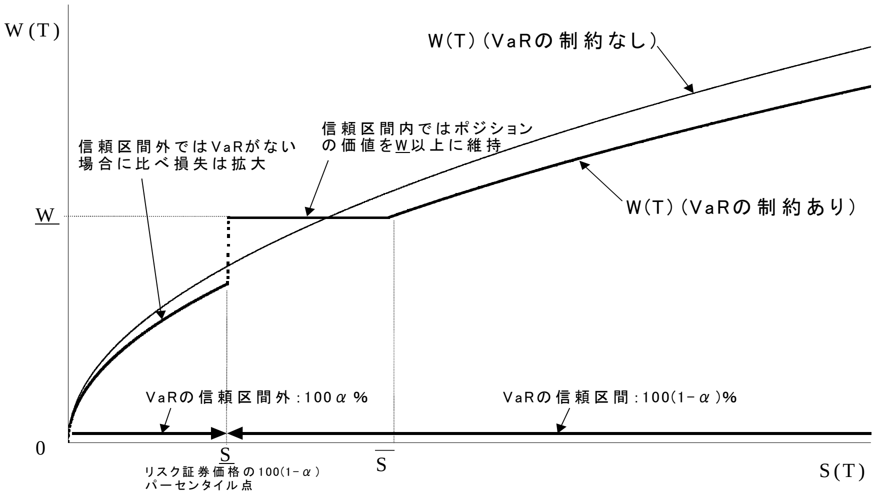
以上から、VaR に基づくリスク管理を行っている投資家の最適化問題は以下の形で表わされる。

$$\begin{aligned} &\max_{W(T)} E[u(W(T))] \\ &subject\ \ to\ \ E[\xi(T)W(T)] \le W(0) \\ &\qquad\qquad\quad P(W(T) \ge \underline{W}) \ge 1 - \alpha \end{aligned} \tag{15}$$

この最適化問題の解を図式的に表わすと図表 18のようになる。まず、VaR の信頼区間内では、最低限$\underline{W}$のポートフォリオ価値を維持する必要があることから、この$\underline{W}$がポートフォリオ価値のボトムとなるようポートフォリオが運営される。一方、予算制約式を満たすためには、最適ポートフォリオに比べて、この信頼区間内で維持される$\underline{W}$の分だけ他の状態のポートフォリオ価値は減少している必要がある。したがって、信頼区間外と株価が上昇した時のポートフォリオ価値は低下する形になる。

図表 18 VaR によるリスク管理下の最適ポートフォリオの T 期における価値

縦軸：最適ポートフォリオの T 期における価値、横軸：リスク証券の T 期における価格



したがって、VaR に基づくリスク管理は、もともと最悪時の損失に備えたものでありながら、実際には、それを導入することで、投資家は、リスク証券（株式）価格が信頼区間外に下落した場合により大幅な損失が発生するポジションをとるようになってしまうのである[29]。

一方、期待ショートフォールに基づくリスク管理では、ある閾値を上回る範囲での損失額の条件付期待値が一定値η（典型的には自己資本など）を下回るようにポジション運営が行われる。閾値を$\underline{W}$としてこれを数学的に表わすと以下のようになる[30]。

$$E\left[W(0)-W(T)\middle|W(T)\le \underline{W}\right]\le \eta \tag{16}$$

ここで、$\varepsilon \equiv \eta - W(0) + \underline{W}$とすると、

$$E\left[\underline{W}-W(T)\middle|W(T)\le \underline{W}\right]\le \varepsilon \tag{17}$$

これは、一定値$\underline{W}$を下回る範囲で、この$\underline{W}$と最終的な富$W(T)$との差額の条件付期待値が、ε以内に抑えられることを示している。

Basak and Shapiro[1999]では、最適化問題の解をより簡便に得るために、(17)

29 Basak and Shapiro(1999)では、こうした VaR に基づくリスク管理の下での投資家の最適化行動の結果、VaR に基づくリスク管理が行われない場合に比べ、株価下落時の株価ボラティリティが大幅に上昇することを、一般均衡の枠組みで示している。

30 $\underline{W} = W(0) - VaR(\alpha)$とすると、期待ショートフォールと同じとなる。ただし、$VaR(\alpha)$は投資家の投資戦略によって変化するため、$W(0) - VaR(\alpha)$を閾値とすると最適化問題が極めて複雑となってしまう。このため、ここでは閾値を一定値$\underline{W}$として定式化を行う。

式にさらに修正を加え、以下の形で期待ショートフォールに基づくリスク管理の定式化を行っている[31]。

$$E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))1_{\{W(T)\le\underline{W}\}}]\le\varepsilon \tag{18}$$

条件付期待値の定義より、

$$E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))1_{\{W(T)\le\underline{W}\}}]=E\left[\xi(T)(\underline{W}-W(T))\middle|W(T)\le\underline{W}\right]P(W(T)\le\underline{W}) \tag{19}$$

が成立つことから、(18)式左辺は、$\underline{W}-W(T)$ に状態価格密度$\xi(T)$ を乗じてその条件付き期待値をとり、これにポートフォリオの価値$W(T)$ が閾値$\underline{W}$ を下回る確率 $P(W(T)\le\underline{W})$ を乗じたものである。

ここでは、(18)式左辺を期待ショートフォールに類似した指標として「修正期待ショートフォール」と呼ぶこととし、以下ではこの「修正期待ショートフォール」を期待ショートフォールとみなして考察を行うこととする。

期待ショートフォールによる制約条件の下での投資家による最適化問題は以下のように表わされる。

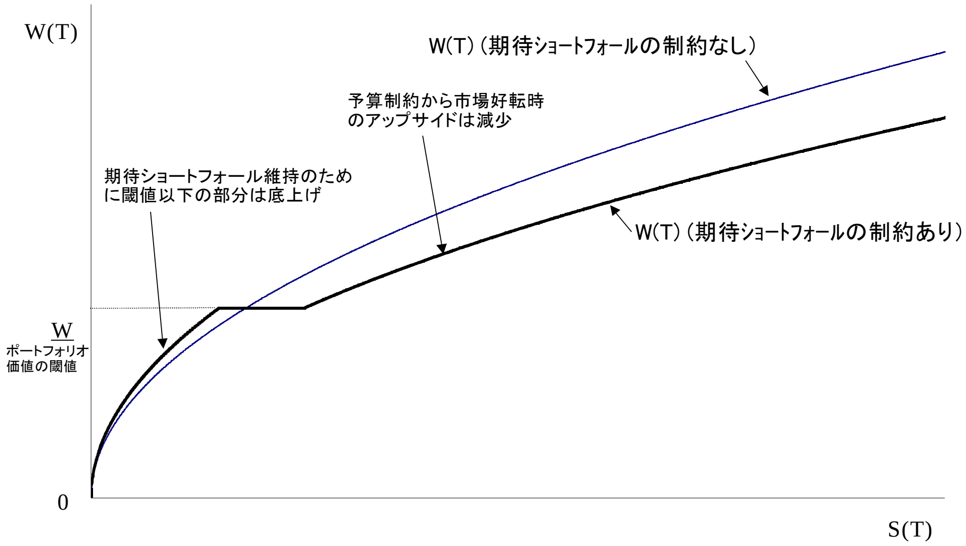
$$\begin{aligned}&\max_{W(T)} E[u(W(T))]\\&\textit{subject to}\quad E[\xi(T)W(T)]\le W(0)\\&\qquad\qquad\quad\;\; E[\xi(T)(\underline{W}-W(T))1_{\{W(T)\le\underline{W}\}}]\le\varepsilon\end{aligned} \tag{20}$$

この最適化問題の解を図式的に表わすと図表 19のようになる。まず、株価が閾値を下回る部分におけるポートフォリオ価値の期待値が維持されるようポートフォリオ運営がなされることから、この部分のポートフォリオ価値は全体的に底上げされる。一方、予算制約式を満たすため、この底上げ分はいずれかの部分で補填される必要があり、最適ポートフォリオに比べて株価が高い部分でのポートフォリオ価値は減少する。

[31] (18)式で1_AはAという条件を満たすとき 1、その他の場合には 0 をとる定義関数である。

図表 19　期待ショートフォールに基づくリスク管理の下での最適ポートフォリオの T 期における価値

縦軸：最適ポートフォリオの T 期における価値、横軸：リスク証券の T 期における価格



したがって、期待ショートフォールに基づくリスク管理を行った場合、株価が大幅に下落する場合でもポートフォリオ価値自体の下落を防ぐような動学的投資戦略がとられることになる（ただし、これに見合う形で株価上昇時のポートフォリオ価値のアップサイドは限定される）。したがって、期待ショートフォールに基づくリスク管理には、株価下落時のダウンサイド・リスクを減少させる効果があり、「最悪時に備えるためのリスク管理指標」として、VaR に比べ望ましい性質を持っていることが分かる。

また、この例は、(１)節におけるオプション・ポートフォリオに関する１時点でのみの売買を前提とする分析結果が、オプション性のある一般的なポジションにも当てはまることも示している。つまり、ここでは、株式と債券を連続時点で動学的に取引する場合におけるテイル・リスクの発生が示されているが、連続時点で動学的に取引することにより任意のヨーロピアン・オプションのペイ・オフを複製できることから、この分析は静態的なオプション・ポートフォリオの分析をも包含している。したがって、(１)節の例で得た結果は、オプション性のある一般的なポジションにも当てはまる。

（4）「分布の裾の操作」とテイル・リスク

前節までの例から、オプション・ポートフォリオおよび与信ポートフォリオでは、VaR が信頼区間外のリスクを捉えられないために、以下のような形でテイル・リスクが発生することが確認できた。

① VaR を抑制しても信頼区間外の損失が増大する場合があること。つまり、VaRがリスクに関するミスリーディングな情報を与える場合があること。

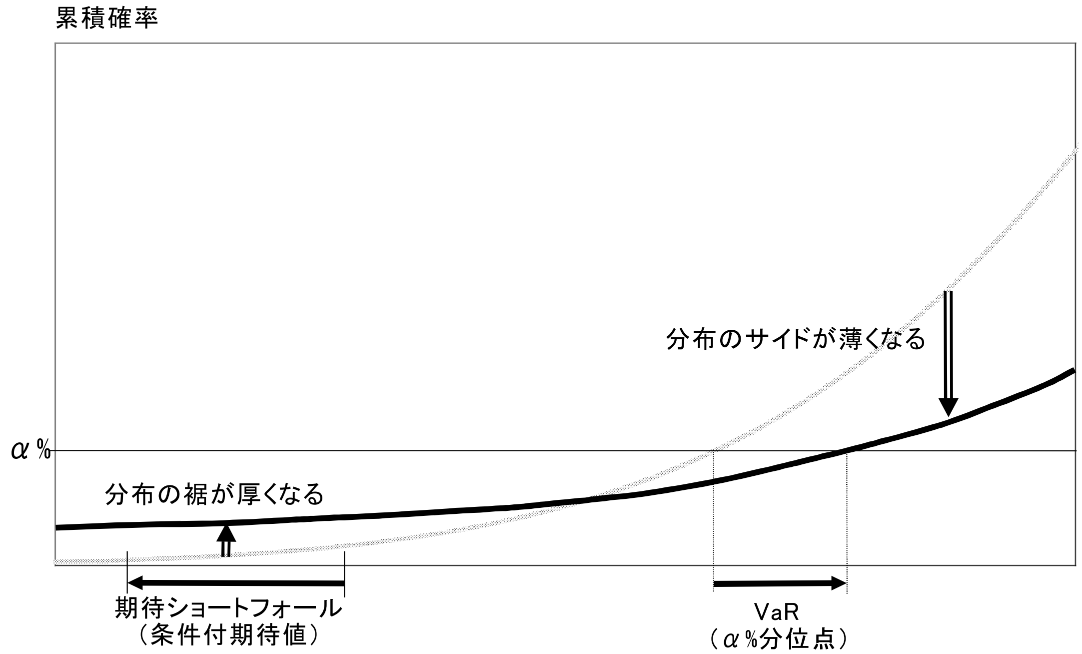
② 特にこの場合、VaR が信頼区間の外での損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的な投資家に与える可能性があること。

このように、VaR のテイル・リスクが問題となるケースの特徴としては、以下の点が挙げられる（図表 20参照）。

① ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションのショート・ポジションや、与信の集中など、（平常時の損益変動は小さいが）比較的小さい確率で大きな損失が生じるような資産が投資機会として存在すること。

② こうした場合、分布の裾を厚くする一方で分布のサイド（中心部分と裾部分の間）を薄くするような操作が出来ること（こうした場合を、本稿では「分布の裾が操作可能」と呼ぶこととする）。

図表 20 テイル・リスクが発生する損益額の累積確率分布



こうした条件が満たされると、裾を厚くする一方でサイドを薄くするようなポートフォリオを組成することにより、VaR を引下げることが可能となる。こうした状況では、VaR は損益額分布のリスクを必ずしも的確に表現していないと考えられ、VaR によるリスク管理は、合理的な投資家（VaR に基づくリスク管理による制約を所与として期待効用を最大化する投資家）をミスリードすることとなる。

さらに、もう一つ注意すべき点として、信頼水準を引上げても、投資家はその引上げられた新しい信頼区間の更に外でリスクをとるインセンティヴを持つことになり、VaR でリスク管理を行っている限りこれは解消しない点である。(１)節および(２)節いずれの例においても、信頼水準を 95%から 99%に引上げても、その信頼区間の外側でのリスクをとるようなポジションが改めて組成され、テイル・リスクを増加させる一方で VaR を引下げることが可能となった。したがって、上記のように、裾の操作によりテイル・リスクが発生する状況では、VaR のみを用いたリスク管理は投資家をミス・リードすることがある。

一方、期待ショートフォールは、裾の部分の損失額を平均値として取り込んでいることから、投資家をミスリードする可能性は低いことが分かる。

5　期待ショートフォールの実務への応用可能性

これまで述べたように、VaR には信頼区間外の損益を把握できないという問題点があり、損益額分布の裾の操作が可能な状況では投資家をミスリードする可能性がある。一方、期待ショートフォールは VaR の信頼区間外の損益も織込むことができ、投資家に対して信頼区間の外で大幅な損失を被るようなポジションをとるインセンティヴを与える可能性が低い。さらに、最近の研究成果では、シミュレーション法によるリスク計測を行い、これによりポートフォリオ管理を行う場合、VaR によるリスク計測・管理ではポートフォリオの最適化が難しい一方、期待ショートフォールではポートフォリオ最適化が比較的容易に行えるとの結果（Rockafeller and Uryasev [2000]）が得られている。したがって、期待ショートフォールは、概念上 VaR よりも優れたリスク指標であるといえる。

しかしながら、期待ショートフォールをリスク管理実務に応用するためには、

いくつか検討を要する事項が残されている。まず、VaR と期待ショートフォールの長所と短所について整理した結果を図表 21に示した。これまで述べてきたように、期待ショートフォールには、VaR の信頼区間外の損益額分布に関する情報を損益額の平均値として織込めるというメリットがあるが、実務上は、①期待ショートフォールを実際に安定的に推計できるか否か十分な検証が進んでいない、②バックテスティングの方法が確立していない、といった問題点がある。

まず、期待ショートフォールの算出には、分布の裾の平均値をとる必要があるため、分布の裾で稀に発生する損益を如何に正確に推計するかという難しい問題に直面することとなる[32]。特に、ポートフォリオの期待ショートフォールを算出する場合、損益額分布の裾の形状が重要となるが、ここでは資産価格間で通常みられる相関関係は崩れている可能性が高いため、相関関係を一定とおく通常のモンテカルロ・シミュレーションでは、分布の裾における損失額の条件付期待値である期待ショートフォールを正確に推計することは困難であると考えられる[33]。さらに、期待ショートフォールのバックテスティングは VaR のバックテスティングに比べて難しいと考えられる。VaR のバックテスティングでは実際の損益額が VaR を上回る頻度（バイオレーション）と VaR の信頼水準とを比較することによってモデルの妥当性が検証される。一方、期待ショートフォールでは、VaR を上回ることを条件とした損失額の平均の実現値と、事前に推計された期待ショートフォールとを比較することが必要である。この分布の裾における平均値を安定的に推計するためには多数のデータが必要であるため、期待ショートフォールは VaR に比べバックテスティングが困難であると考えられる。

[32] 分布の裾の推計には、極値理論（Extreme Value Theory）の利用が考えられる。極値理論による期待ショートフォールの計測例については、Neftci[2000]、Scaillet[2000]などを参照。

[33] ヒストリカル・シミュレーションで期待ショートフォールを求めるとしても、裾の部分の十分なデータ確保が困難な場合が多いと考えられる。

図表 21　VaR と期待ショートフォールとの比較

	VaR	期待ショートフォール
長所	・VaR によるリスク管理は自社の倒産確率と結び付いた形で理解することが可能 ・バックテスティングが比較的容易 ・業界標準的なリスク管理指標であり、算出のためのインフラ（ソフト・ウェアやシステムなど）が充実	・VaR で捉えられない信頼区間外のリスクも織込んでいる ・分布の裾の操作が可能な状況でも、投資家に歪んだインセンティヴを与える可能性は低い ・劣加法性を満たしている ・シミュレーション法でリスク計測を行った場合、ポートフォリオの最適化が容易
短所	・信頼区間外のリスクを織込んでいない（テイル・リスクの存在） ・分布の裾が操作できる状況では、テイル・リスクにより投資家に歪んだインセンティヴを与える ・劣加法性を満たしていない ・シミュレーション法によりリスクを計測した場合、ポートフォリオ最適化が困難	・期待ショートフォールを用いると、「自社が倒産する確率を予め定めた一定値以内に抑える」という扱いが出来なくなる ・算出、バックテスティング方法が必ずしも確立していない ・算出のためのインフラ（ソフト・ウェアやシステムなど）が整っていない

6　VaR をリスク指標として用いる際の実務上のインプリケーション

４章までに述べてきたように、期待ショートフォールは VaR に比べて概念上優れたリスク指標であり、理論的にはこれを活用するのが望ましい。しかし、５章で述べたように、期待ショートフォールを実務に応用するためには、推計値の安定性確保とバックテスティング方法の確立という課題が残されており、これを VaR に代える形で本格的に実務に導入するのは現状は難しいと考えられる。したがって、当面は金融実務において標準的なリスク指標となっている VaR をその限界を十分に踏まえながら活用していくことになろう。ここでは、VaR をリスク指標として利用する場合に注意すべき点を、これまでの議論を基に、リスク管理実務に対するインプリケーションとして列挙する。

（1）ポートフォリオの特性に応じ VaR によるテイル・リスクの大きさが決まる

損益額が正規分布に従わない場合のリスク測定で最も留意すべき点は、「リスクを単一の指標で表わすことはできない」という点である。損益額が正規分布に従わない場合、VaR は分布の形状（特に裾部分）に関する情報の一つを与えているに過ぎない。特に VaR からは「信頼区間の外側でどの程度の損失が発生しているのか」という情報が得られない点が重要であり、VaR を用いてリスクの測定・管理を行う場合はこの点に注意する必要がある。

具体的にこの問題が顕現化してテイル・リスクが発生し得る状況としては、４章で示したように、小さい確率で大幅な損失が発生するような資産をポートフォリオに含んでいる状況が考えられる。こうした意味で、特に、オプションを含むポートフォリオ、与信ポートフォリオを扱う場合は注意する必要がある。

したがって、VaR を利用する際には、それぞれの持つポートフォリオの特性を踏まえたうえで、VaR のみに頼る危険性を認識しておく必要がある。

（2）VaR に基づくリスク管理は信頼区間外で大幅な損失が生じるポジション運営を行うインセンティヴを与える可能性がある

４章でもみたように、小さい確率で大幅な損失が発生するような資産をポートフォリオに含んでいる場合は、分布の裾を厚くする一方、分布のサイドを薄くするという操作により VaR を引下げることが可能となる。さらにこの場合、VaR によるリスク管理は、合理的な投資家に信頼区間の外で大きな損失が発生するポジション運営を行うインセンティヴを与える可能性がある。この問題は、VaR の信頼水準を引上げても解決されない。

したがって、金融機関が内部リスク管理において、各部署あるいはトレーダーに VaR によるリスク枠の配分を行う場合や、規制当局が VaR によって測定されたリスク量に対して規制を行うような場合には、こうした VaR によるリスク管理が与えるインセンティヴを念頭に置き、VaR とは別の管理手法や規制を組合わせる必要があると考えられる。

(3) ストレス・テストに対するインプリケーション

BIS・グローバル金融システム委員会[2000]では、ストレス・テストの利用状況について述べる中で、以下の 2 点がストレス・テスト利用の重要な側面であることを指摘している。

① ストレス時の損失額と経営体力との比較・分析
「…経営者に対し（レバレッジの程度や性質といった）リスクテイク量とリスク許容量の間の戦略的な関係を理解させる必要があり、ストレステストは、そのための情報を収集・集約する役割を担っている…。」

② テイル・リスクの計量化
「大規模な損失が企業にとって特に深刻なコストを強いるとすれば、経営者は過剰なテイル・リスクを有する危険なポートフォリオを持たないためにストレステストを利用することができる。」

VaR 的な発想でストレス時のロスを算出する方法、すなわち、非常に高い水準（例えば 99.99%）の下で最大損失を算出する方法や過去のストレス時のシナリオを用いて損失額を算出する方法は、前者のシナリオに基づくストレス時の損失額と経営体力との比較という意味ではある程度妥当性があると思われる一方、後者のテイル・リスクの管理（VaR の信頼区間外で生じる損失の検出）という意味では不十分である。この場合は、期待ショートフォールのように分布の裾部分を考慮する手法によりストレス時の損失額を測定し、ポートフォリオの脆弱性を調べる必要がある。特に、分布の裾部分の一部しか考慮しない手法に基づくストレス・テストで算出した損失額をリスク枠算出の根拠とした場合、トレーダーに信頼区間の外で大幅な損失を被るポジションをとるインセンティヴを与えてしまう可能性があることは認識する必要がある。

(4) デスク単位における肌目細かいリスクの管理の重要性

こうした VaR の問題点に対しては、実務的な観点から、「トレーディング・デスク・レベルでは、VaR だけではなく、多様なリスク指標等によってリスク管理を行っている。したがって、VaR のテイル・リスクの問題はこうしたデスク・レベルで従来から行われているリスク管理により十分対応できる」との考え方

もあると思われる。

この考え方の妥当性は、「デスク・レベルでのテイル・リスクの小ささが、全社ベースでのテイル・リスクの小ささを意味するか否か」に依存する。すなわち、仮にデスク・レベルでのリスク管理により個別ポジションのテイル・リスクが抑えられるとしても、合算したポジションのテイル・リスクが大きくなるとすれば、デスク・レベルでのリスク管理を行っても、全社的な観点に立てば、テイル・リスクは抑えることができないことになる。

これに対しては、期待ショートフォールの劣加法性を手掛かりとして一つの考え方を示すことが出来る。これまで述べてきたように、期待ショートフォールはテイル・リスクも織込んだリスク指標の一つであり、テイル・リスクの一つの代理変数と考えることができる。一方、期待ショートフォールは一般的に劣加法性を満たすことから、全体のポジションの期待ショートフォールは、個別ポジションの期待ショートフォールの和を上回ることはない。このことから、全体のポジションのテイル・リスクは個別ポジションのテイル・リスクの和を上回ることはないと考えることができる。したがって、デスク・レベルで個別ポジションのテイル・リスクを適切に管理することは、全社レベルでもテイル・リスクが適切に管理されることに繋がるため、デスク・レベルで従来から行われているリスク管理により全社レベルのテイル・リスクは管理できるとの結論が示唆される。このことは、VaR などの単一のリスク指標のみならず、ポジションの損益曲線図などリスク・プロファイルの詳細なモニターによりデスク・レベルで肌目細かいリスク管理を行う必要性と有効性を示唆している。

（5）与信ポートフォリオにおける与信集中管理の重要性

４章(２)節の例で述べたように、与信ポートフォリオでは、与信集中がテイル・リスクの主因となっていた。また、Credit Suisse Financial Products[1997]でも、VaR の信頼区間外のリスク管理については、「シナリオ分析によって計量化を行い、与信集中度合いに制限を設けることによってコントロールすべき（Quantified using scenario analysis and controlled with concentration limits）」としている。したがって、与信ポートフォリオ管理で VaR を用いる際は、VaR が与信集中リスクを十分に捉え切れない場合があり得ることに十分に注意を払い、VaR 以外に与

信の極端な集中を回避する管理体制を構築する必要がある。

7　おわりに

本稿では、期待ショートフォールとの比較により VaR のリスク指標としての妥当性を検討し、VaR の問題点として最も重要なのは、VaR が信頼区間外の損失を把握できない点であることを指摘した。こうした問題点は、①VaR がミスリーディングな情報を投資家に与える可能性があること、②この場合、VaR によるリスク管理は、信頼区間外における損失がより大きくなるポジションをとるインセンティヴを合理的投資家に与える可能性があること、といった形（テイル・リスク）でリスク管理の失敗に繋がることを示した。一方、期待ショートフォールにはこうした問題が発生する可能性は小さく、VaR に比べて概念上優れたリスク指標であることを示した。しかしながら、いまのところ期待ショートフォールの算出方法やバックテスティング方法の十分な検証が進んでいないことから、今後も当面はリスク管理実務において VaR が中心的役割を果していくと考えられる。VaR を用いてリスク管理を行う際は、オプションを含むポートフォリオおよび与信ポートフォリオなど VaR の問題点が顕著となる状況に注意を払い、①デスク･レベルでの肌目細かいリスク管理、②与信集中度合いの把握・制限などの補完的対応を図ることによりリスク・プロファイルの把握に努めることが重要である。

今後の研究課題としては、①期待ショートフォール推計値の安定性の検証、②バックテスティング手法の確立のほか、③どのような金融資産ポートフォリオに VaR に基づくリスク管理を適用した際にテイル・リスクが顕現化するのかを明確にすることが挙げられる。テイル・リスクが発生するような損益額分布の特性が事前に分かっていれば、この部分に VaR に基づくリスク管理と何らかの補完的な管理（期待ショートフォールの計測、ポジション・リミット等）を組合わせることで、テイル・リスクを適切に管理することが出来ると考えられる。４章では簡単なモデルを手掛かりとして、小さい確率で大きな損失が発生するような資産が投資機会として存在し、「裾の操作が可能」な場合にテイル・リスクが顕現化することを示したが、実務上あるいは理論上テイル・リスクに

ついて更に詳しく考察するためには、数学的により一般化して検討することが必要であると考えられる。

以　上

参考文献

池田 昌幸、『金融経済学の基礎』、朝倉書店、2000 年

金融監督庁・FISC、「リスク管理モデルに関する研究会報告書」、1999 年

竹内 啓、『数理統計学』、東洋経済新報社、1963 年

日本銀行金融研究所、「FE ワークショップの模様 ――リスク計量に関する新たな取り組み――」、『金融研究』第 19 巻第 3 号、日本銀行金融研究所

BIS・グローバル金融システム委員会、「大規模金融機関におけるストレステスト：ストレステストの現状とテスト結果の集計に関する論点」、2000 年

森本 祐司、「金融と保険の融合」、『金融研究（別冊）』第 19 巻第 1 号、日本銀行金融研究所

Ahn, D, J. Boudoukh, and M. Richardson, "Optimal Risk Management Using Options," *Journal of Finance*, Vol. 54, No. 1, February 1999, pp. 359-375.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Thinking Coherently," *Risk*, Vol. 10/No. 11, November 1997, pp. 68-71.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance,* Vol. 9, No. 3, July 1999, pp. 203-228.

Basak, S., and A. Shapiro, "Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," working paper, The Rodney White Center for Financial Research, 1999.

Credit Suisse Financial Products, *Credit Risk^{+}: A Credit Risk Management Framework*, 1997.

Danielsson, J., "The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling," Working Paper Series W00:04, Institute of Economic Studies, University of Iceland, June 2000.

Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," Preprint, ETH Zürich, 1999.

Fishburn, P. C., "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *American Economics Review*, Vol. 67, No. 2, March 1977, pp. 116-126.

Greenspan, A., "Remarks at the 36th Annual Conference on Bank Structure and Competition," Federal Reserve Bank of Chicago, 2000.

Kim, J., and J. Mina, *RiskGrades Technical Document*, RiskMetrics Group, May

2000.

Klüppelberg, C. and R. Korn, “Optimal Portfolios with Bounded Value-at-Risk,” Working Paper, Munich University of Technology, 1998.

Lotz, C. M. J., “Optimal Shortfall Hedging of Credit Risk,” Working Paper, Faculty of Economics, University of Bonn, 1999.

Neftci, S. N., “Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation,” *Journal of Derivatives*, Spring 2000.

Pflug, G. C., “Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk,” *Probabilistic Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 278-287.

Rockafeller, R. T. and S. Uryasev, “Optimization of Conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, Spring 2000.

Rootzén, H., and C. Klüppelberg, “A Single Number Can’t Hedge Against Economic Catastrophes,” Working Paper, Munich University of Technology, 1999.

Scaillet, O., “Nonparametric Estimation and Sensitivity Analysis of Expected Shortfall,” Working Paper, IRES, 2000.

Ulmer, A., “Picture of Risk,” RiskMetrics Group, 2000.