

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

順序プロビット・モデルのテストと
社債格付データへの応用

こばやしまさひと
小林正人

Discussion Paper No. 2000-J-17

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

備考： 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

順序プロビット・モデルのテストと社債格付データへの応用

こばしまさひと
小林正人*

要 旨

本稿では、3つのカテゴリーを持つ順序プロビット・モデルが多項プロビット・モデルの極限として表現されることを示し、前者を後者に対して検定するために、ラグランジュ乗数検定統計量を修正した新しい統計量を提示する。この検定統計量は、モンテカルロ実験により一定の条件下では十分な検出力を持つことが確かめられる。社債格付にこの統計量を応用した場合、順序プロビット・モデルの多項プロビット・モデルに対する検定は、格付付与がすべての格付ランクに対して一律の基準で行われているか否かを確かめることと同じ意味を持つ。このためここで提案された新しい統計量は、格付分析に新しいツールを提供するものとして、実務上の有用性が高いと考えられる。

キーワード：社債格付，順序プロビット・モデル，多項プロビット・モデル，ラグランジュ乗数検定

JEL classification: C35

*横浜国立大学経済学部 (E-mail: mkoba@cms.ynu.ac.jp)

本論文は、筆者が日本銀行金融研究所国内客員研究員として、1998年11月から開始した研究プロジェクトの成果の一部である。本論文を作成するに当たっては、日本銀行金融研究所のスタッフから有益な示唆を頂いた。東京大学大学院経済学研究科院生の井上健氏にはデータの加工をしていただき、匿名の査読者からは貴重なコメントとともに縄田和満氏の論文の存在をご教示いただいた。ここに感謝を表したい。

1. 序論

社債格付を財務データなどから統計的に判別するモデルを構築する際には、木島・小守林 (1999, pp.70-72) ,安川(1999) ,中山・森平(1998), Kaplan and Urwitz (1979), Ederington (1985), Cheung (1996), Blume et al. (1998) などで見られるように、順序ロジット・モデルあるいは順序プロビット・モデルが用いられることが多い。順序プロビット(ロジット)・モデルは、順序付けされた複数のカテゴリーのいずれに分析対象が属するかを判定するモデルである。具体的には、データの一次結合からなる単一の潜在変数を判別の尺度とし、この潜在変数と各カテゴリー間の閾値との比較によって、各カテゴリーの分類が行われる¹。

このように社債格付の判別に順序プロビット(ロジット)・モデルを用いることは、社債格付が企業を信用リスクの高さに応じてランク付けするものであることを考えれば、極めて自然と思われる。しかしながら、実際に格付会社による格付付与の判断基準が、順序プロビット(ロジット)・モデルの前提を満たしているか否かは自明ではない。たとえば、ある企業の格付を AAA とするか AA とするかを判断する場合と、BBB とするか BB とするかを判断する場合とでは、格付会社の判断基準(判断に用いる各財務指標のウェイト付けなど)が異なることは十分考えられる。この場合、単一の潜在変数のみを用いてすべての格付を判別する順序プロビット(ロジット)・モデルでは、誤った判別が行われる可能性が高く、各カテゴリー間に順序関係を想定していないという点で、多項プロビット(ロジット)・モデルを用いることがより望ましい。多項プロビット(ロジット)・モデルは、順序プロビット(ロジット)・モデルとは異なり、各カテゴリー毎に異なる潜在変数を想定するため、判別基準がランクによって異なる場合にも応用することが可能なのである。

¹ プロビットモデル、ロジットモデルについてはGreene(1997)が詳しい。

したがって、実際の格付判別には、多項モデルと比較して順序モデルを用いることが妥当か否かを統計的検定に基づいて判断できることが望ましい。しかし順序ロジットモデルは多項ロジットモデルの特殊型ではないため、両者間の仮説検定は不可能である。また、多項プロビット・モデルと順序プロビット・モデルとの関係が広く認識されておらず²、モデルの定式化の統計的検定は今まで提案されてはいない³。このように、順序プロビット（ロジット）モデルの利用については、その妥当性の統計的検定を十分に行うことができず、ややもすれば先験的にモデルが与えられているという印象を与えていることが多いようである。

そこで、本論文では、対象をプロビット分析に限定し、カテゴリーが3つの順序プロビット・モデルは、多項プロビット・モデルにおける誤差項の相関が -1 に収束した極限であることを明らかにする⁴。したがって、順序プロビット・モデルは、特殊ケースとして多項プロビット・モデルに内包され、原理的には仮説検定が可能となる。しかし、帰無仮説のもと、相関係数についての対数尤度の導関数が恒等的に0であることが示されるため、情報行列が非正則となり、ワルド検定、尤度比検定、ラグランジュ乗数検定などの既存の検定統計量が定義できない。このような場合、一般的な解決手段として、Cox と Hinkley (1974, pp.117-118)の係数変換、Lee と Chesher (1986)の高次導関数の利用などが提案されているが、それぞれの手法の要求する前提条件が満

² Amemiya (1985)に言及があるほか、縄田 (2000)には選択肢の数が4つ以上の一般の場合に順序プロビットが多項プロビットの特殊な場合であることが証明されている。

³ 順序プロビット（ロジット）モデルの定式化のチェックとしてはMcCullagh (1980)の提案した Proportional Odds Assumption を調べる方法がある。これは、3つ以上の選択肢を2つの選択肢にまとめて2項プロビット（ロジット）・モデルを適用したとき、選択肢のまとめかたによって説明変数の係数がかわらないことを確認するものである。この方法は簡便であるが、伝統的な仮説検定と異なって対立仮説が明かでないため、仮説が棄却されたときの解釈が困難である。

⁴ ロジット分析については、多項ロジット分析と順序ロジットとの包含関係が存在し

たされないため、我々の問題には利用不可能である。そこで、本論文ではラグランジュ乗数法を変形した統計量を新しく提案する。これは順序プロビット・モデルの多項プロビット・モデルに対する検定としては初めてのものである⁵。この検定統計量の簡単な Monte Carlo 実験を行い、第 5 章に、本邦における社債格付データに本論文の検定統計量を用いて格付判別分析をおこなった結果を示す。ここでは、格付判別への順序プロビット・モデルの応用の妥当性がはっきりと棄却されている。さらに、多項プロビット・モデル分析により、利用されている財務変数が格付ランクにより有意に異なっていることが確認された。したがって、この結果からは単一の尺度ですべての格付を行う順序プロビットモデルの前提は格付会社の基準と整合的でなく、多項プロビット・モデルを用いることが望ましいと結論づけることができる。

2. モデル

3つのカテゴリー A, B, C に対する潜在変数が下のように説明変数の一次式で表されるとしよう。標準化のため、カテゴリー B に対する潜在変数は 0 とした。

$$\begin{aligned}
 & \text{A に対する潜在変数: } \alpha + \beta'x_i + e_{Ai}, \\
 & \text{B に対する潜在変数: } 0, \\
 & \text{C に対する潜在変数: } \gamma + \eta'x_i + e_{Ci}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、 x_i ($i=1, \dots, n$) は k 行 1 列の説明変数ベクトル、 β と η は k 行 1 列の係数ベクトルである。攪乱項 (e_{Ai}, e_{Ci}) , ($i=1, \dots, n$) は平均 0, 分散共分散行列

$$\begin{bmatrix} 1 & rs \\ rs & s^2 \end{bmatrix}$$

えないことは容易に示すことができるので、本論文の対象とはしない。

⁵ 査読者より、帰無仮説のもとでは分布が退化していることから、検出力のより高い検定の存在の可能性があることについて示唆をうけたが、これは今後の研究の課題としておきたい。

を持つ2変量正規変数ベクトルとし、観測対象(添え字*i*で示す)が異なるとき互いに独立であるとする。Aに対する潜在変数の分散は1とおく。

被説明変数 y_A はカテゴリ-Aが選ばれるとき1という値をとり、それ以外の際には0という値をとる。他の被説明変数 y_B と y_C も同様に定義すると、最も高い潜在変数を示すカテゴリが選ばれると仮定することにより、次の多項プロビット・モデルが定義される。

定義：多項プロビット・モデル

$$\begin{aligned}
 y_{Ai} &= 1 \quad (\alpha + \beta'x_i + e_{Ai} > 0 \text{ かつ } \gamma + \eta'x_i + e_{Ci} < \alpha + \beta'x_i + e_{Ai} \text{ のとき}) \\
 &= 0 \quad (\text{それ以外の際}) \\
 y_{Bi} &= 1 \quad (\gamma + \eta'x_i + e_{Ci} < 0 \text{ かつ } \alpha + \beta'x_i + e_{Ai} < 0 \text{ のとき}) \quad (2) \\
 &= 0 \quad (\text{それ以外の際}) \\
 y_{Ci} &= 1 \quad (\gamma + \eta'x_i + e_{Ci} > 0 \text{ かつ } \gamma + \eta'x_i + e_{Ci} > \alpha + \beta'x_i + e_{Ai} \text{ のとき}) \\
 &= 0 \quad (\text{それ以外の際}) .
 \end{aligned}$$

ここで第*i*番目の観測でAが選ばれる確率を P_{Ai} と表すと

$$P_{Ai} = \Pr(y_{Ai}=1) = \Pr(\alpha + \beta'x_i + e_{Ai} > 0, \gamma + \eta'x_i + e_{Ci} < \alpha + \beta'x_i + e_{Ai}),$$

$$P_{Bi} = \Pr(y_{Bi}=1) = \Pr(\gamma + \eta'x_i + e_{Ci} < 0, \alpha + \beta'x_i + e_{Ai} < 0),$$

$$P_{Ci} = \Pr(y_{Ci}=1) = \Pr(\gamma + \eta'x_i + e_{Ci} > 0, \gamma + \eta'x_i + e_{Ci} > \alpha + \beta'x_i + e_{Ai})$$

となり、第*i*番目の観測の対数尤度は

$$\ell_i = y_{Ai} \log P_{Ai} + y_{Bi} \log P_{Bi} + y_{Ci} \log P_{Ci} \quad (3)$$

とあらわされる。

攪乱項 (e_A, e_C) が図1内の左上の領域にあるときにAが選ばれ、攪乱項 (e_A, e_C) が左下の領域にあるときにBが選ばれ、攪乱項 (e_A, e_C) が右下の領域にあるときにCが選ばれる。

ここで、 $\rho = -1$ かつ $\sigma = 1$ とすると、攪乱項 (e_A, e_C) の分布は一次元正規分布に退化し、

すべての確率は図1において左上から右下に走る45度線上に集中する。さらに制約 $\beta = -\eta$ と $\alpha < -\gamma$ を追加すれば、説明変数がいかなる値をとっても直線はA, B, Cの三つの領域に分割される。したがって、閾値 α, γ と $\beta'x_i + e_{Ai} = -\eta'x_i - e_{Ci}$ とがカテゴリ-を決定する。すなわち、仮定

$$\sigma = 1, \eta = -\beta, \alpha < -\gamma \text{ かつ } \rho = -1 \quad (4)$$

のもと、多項プロビット・モデルは次の順序プロビット・モデルに帰着されるのである。

$$\begin{aligned} y_A &= 1 \quad (\alpha + \beta'x + e_A > 0 \text{ のとき}) \\ &= 0 \quad (\text{その他のとき}) \\ y_B &= 1 \quad (-\gamma + \beta'x + e_A > 0 \text{ かつ } \alpha + \beta'x + e_A < 0 \text{ のとき}) \\ &= 0 \quad (\text{その他のとき}) \\ y_C &= 1 \quad (-\gamma + \beta'x + e_A < 0 \text{ のとき}) \\ &= 0 \quad (\text{その他のとき}). \end{aligned} \quad (5)$$

これは次のようにして容易にしめされる。仮定 $\rho = -1, \sigma = 1, \eta = -\beta$ より、 $\beta'x + e_A = -(\eta'x + e_C)$ であるので、これを U としよう。すると選択肢Aに対応する潜在変数は $\alpha + U$ となり、選択肢Cに対応する潜在変数は $\gamma - U$ となることに注意する。 $\alpha + U > 0$ のとき $\alpha + U > -\alpha - U$ であるので、 $\alpha < -\gamma$ より $\alpha + U > \gamma - U$ が得られ、前提の $\alpha + U > 0$ をあわせたものが多項プロビットにおいて $y_A = 1$ の条件である。同様に、 $-\gamma + U < 0$ のとき $-\gamma + U < \gamma - U$ であるので、 $\alpha < -\gamma$ より $\alpha + U < \gamma - U$ を得る。同時に $\gamma - U > 0$ でもあり、これらは多項プロビットにおいて $y_C = 1$ となる条件である。さらに、 $-\gamma + U > 0$ かつ $\alpha + U < 0$ は多項プロビットにおいて $y_B = 1$ の条件である。以上のように(5)が示されたのである。

3. テスト統計量

前章で、カテゴリーが三つの場合、順序プロビット・モデルが多項プロビット・モデルの特殊ケースとして内包されることを証明したので、本章では順序プロビット・モデルを帰無仮説とし、多項プロビット・モデルを対立仮説とする検定統計量を提案する。ラグランジュ乗数検定を出発点とするため、まず対数尤度の一階の導関数を帰無仮説、すなわち制約 $\rho = -1, \sigma = 1$ かつ $\eta = -\beta$ のもとで求める。これが次の命題の内容である。計算の詳細は補論にまとめる。

命題：表記を容易にするため、 $\Delta = \eta + \beta, \mu = -\alpha - \beta'x$ および $\tau = -\gamma + (\beta - \Delta)'x$ とすると、帰無仮説のもと、対数尤度の一階の導関数は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 l_\sigma &= \partial \ell / \partial (1/\sigma) = (y_A/P_A - y_C/P_C)(\tau - \mu)(1/4)\phi((\tau - \mu)/2) + (y_B/P_B - y_C/P_C)\phi(\tau)\tau, \\
 l_\rho &= \partial \ell / \partial \rho \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow -1} (1/2)(2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} \exp(-(1-\rho^2)^{-1}(\mu^2 + \tau^2 - 2\rho\tau\mu)/2) (-y_A/P_A + 2y_B/P_B - y_C/P_C) = 0, \\
 l_\Delta &= \partial \ell / \partial \Delta = \phi(\tau)(-y_B/P_B + y_C/P_C)x, \\
 l_\alpha &= \partial \ell / \partial \alpha = \phi(\mu)(y_A/P_A - y_B/P_B), \\
 l_\gamma &= \partial \ell / \partial \gamma = \phi(\tau)(y_C/P_C - y_B/P_B), \\
 l_\beta &= \partial \ell / \partial \beta = [\phi(\mu)y_A/P_A - (\phi(\mu) - \phi(\tau))y_B/P_B - \phi(\tau)y_C/P_C]x.
 \end{aligned} \tag{6}$$

不幸なことに、攪乱項の相関係数についての対数尤度の導関数 l_ρ が恒等的に 0 であるため、情報量行列は非正則となり、通常の仮説検定は定義できない。Lee と Chesher (1986) は、一次の導関数が 0 の場合で、高次の導関数を用いる手法を提案しているが、このケースではすべての次数の導関数が指数的に 0 に収束するため、彼らの手法は使えない。また、Cox と Hinkley (1976) の提案する係数変換も、われわれの扱う導関数が係数と説明変数の複雑な関数になっていることから、その応用は困難である。そこ

で，本論文では ℓ_ρ 内の $\partial P_A/\partial \rho$, $\partial P_B/\partial \rho$, $\partial P_C/\partial \rho$ のかわりに極限における相対比 1, -2, 1 を代入し，

$$\ell_0 \equiv y_A/P_A - 2y_B/P_B + y_C/P_C \quad (7)$$

を ℓ_ρ の代わりに使うことを提案する．ここで，

$$U \equiv n^{-1/2}(\sum_{i=1}^n \Lambda_{0i}, \sum_{i=1}^n \Lambda_{\Delta i}, \sum_{i=1}^n \Lambda_{\sigma i})'$$

とし， $\Lambda_0, \Lambda_\Delta, \Lambda_\sigma$ を $\ell_0, \ell_\Delta, \ell_\sigma$ の推定量とすると，提案される統計量は

$$U'[\text{var}(U)]^{-1}U \quad (8)$$

となる．ただし， $\ell_0, \ell_\Delta, \ell_\sigma$ の推定量には，未知係数 α, β および γ の最尤推定量を代入したものをを用いる．

$$\begin{aligned} v_1 &= n^{-1/2}(\sum_{i=1}^n \ell_{0i}, \sum_{i=1}^n \ell_{\Delta i}, \sum_{i=1}^n \ell_{\sigma i})', \quad v_2 = n^{-1/2}(\sum_{i=1}^n \ell_{\alpha i}, \sum_{i=1}^n \ell_{\beta i}, \sum_{i=1}^n \ell_{\gamma i})', \\ \Sigma_{11} &= E(v_1 v_1'), \quad \Sigma_{22} = E(v_2 v_2'), \quad \Sigma_{12} = E(v_1 v_2') - E(v_1)E(v_2') \end{aligned} \quad (9)$$

とすると， U の漸近分布は分散共分散行列 $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'$ を持つ．また $\Sigma^{11} = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1}$ とおくと， k を β の次元として， $U'\Sigma^{11}U$ は自由度 $2+k$ のカイ自乗分布にしたがうことが容易に示される．証明はラグランジュ乗数テストの場合と同一であるのでここでは省略する．行列 Σ^{11} は， v_1 と v_2 の分散共分散行列の逆行列における左上の部分行列であるので， $\Lambda_i = (\Lambda_{0i}, \Lambda_{\Delta i}, \Lambda_{\sigma i})'$ とすると， Σ^{11} の推定は

$$H = n^{-1}\sum_{i=1}^n \Lambda_i \Lambda_i' \quad (10)$$

の逆行列において対応する部分行列によって可能である．したがって，

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix} = H^{-1}$$

とおくと，

$$T = v_1' H^{11} v_1 \quad (11)$$

と目的の検定統計量が定義される．

4. モンテカルロ実験

提案された統計量の実際のサイズと検出力を調べるため、簡単なモンテカルロ実験を行うことにする。独立な標準正規変数の実現値を説明変数とし、標本サイズ400、反復数2000回、帰無仮説における係数は $\alpha = -0.40, \gamma = -0.50, \beta = -0.8, \eta = 0.8$ とする。表1にあげた結果は次のように要約される。実際のテストのサイズ(0.1305と0.0665)はそれぞれ名目のサイズ(0.10と0.05)を若干上回る。分散が異なるケース($\sigma^2 \neq 1$ のとき)も、回帰係数が異なるケース($\beta \neq -\eta$)も、十分な検出力をもっている。しかし、相関係数 ρ については、残念ながら、帰無仮説からかなり異なる場合($\rho = 0.5$)でもこの検定の検出力は低いことが観察される。

5. 社債格付への応用例

ここでは1997年における製造業302社を対象とし、日本公社債研究所の格付をBBB以下、A、およびAA以上の3つに再区分した標本で順序プロビット・モデルを推定した。説明変数としては、日本格付投資情報センターが格付の際に重視するとホームページで公表している以下の6つの財務指標を候補とする。

X1:キャッシュフロー = 当期利益 + 減価償却費 - 配当金・役員賞与

X2:有利子負債キャッシュフロー倍率 = 有利子負債 / キャッシュフロー

X3:自己資本比率 = 自己資本 / 使用総資本

X4:総資本事業利益率 = (営業利益 + 受取利息・配当金) / 使用総資本(期首・期末平均)

X5:インタレストカバレッジ = (営業利益 + 受取利息・配当金) / 支払利息・割引料

X6:経常収支比率 = (営業収入 + 営業外収益) / (営業支出 + 営業外費用)

財務データは日経 NEEDS から入手したものをを用いる。キャッシュフローについてはその自然対数を説明変数として使い、負のキャッシュフローをもつ対象は推定から

除外したので、標本の大きさは298社に減少する。

表2に順序プロビット・モデルの推定結果を示す。推定式による予測と実際の評価の一致率は80.5%であり、先行研究の多くが7割から8割の一致率であることと比較しても見劣りするものではない。しかし、最後の3変数（総資本事業利益率、インタレストカバレッジ、経常収支比率）が5%レベルで有意でないというのは、当の格付機関が評価に利用すると発表しているだけに奇妙な結果である。そこで、本論文の検定統計量を計算したところ98.3という値をとり、この統計量が帰無仮説のもとで自由度8のカイ自乗分布に従うことから、順序プロビット・モデルは明確に棄却される。したがって、次元の情報ですべての格付をおこなう順序プロビット・モデルはデータと整合的でなく、多項プロビット・モデルというより緩やかな枠組みが示唆されるのである。

そこで同じ標本に対して3変数多項プロビット・モデルの推定を行った。ただし、図3の対数尤度のプロットが示すように、 σ については対数尤度を最大にすることができず、 ρ についても区間の端点で対数尤度を最大にしており、対数尤度の変化もわずかであった。そこで尤度による ρ と σ の推定は困難であると判断し、仮説「 $\rho=0$ 、 $\sigma=1$ 」に対する通常のラグランジュ乗数テストを行ったところ、統計量の値は0.843（自由度2のカイ自乗分布のp-value=0.656）ときわめて小さく、帰無仮説は棄却されなかった。そこで、 $\rho=0$ と $\sigma=1$ を便宜的に仮定して最終的な最尤推定を行った結果が表3である。

順序プロビットで有意でない変数（総資本事業利益率、インタレストカバレッジ、経常収支比率）は、第2の潜在変数（格付BBB以下に対応）の決定要因としても有意ではないが、第1の潜在変数（格付AA以上に対応）の決定要因としては有意になっている。すなわちこれら3変数は低位格付債券の評価では重視されないが、高位格付債券の評価では重視されると解釈できる。すなわち順序プロビットから多項プロビ

ットにモデルを緩めることにより，カテゴリ毎に用いる潜在変数が異なるという状況があきらかとなったのである．図2に2つの潜在変数の分布と実際の格付の分布を示した．なお予測値と実際の格付評価の一致率は82.9%であり，多項プロビット・モデルは順序プロビット・モデルより柔軟なだけに，やや当てはまりは向上している．しかし，原サンプルのうち7割をランダムに抽出したもので推定をおこない，残りの3割で一致率を比較するというクロス・バリデーションを行ったところ，多項プロビット・モデルと順序プロビット・モデルの一致率の高低は抽出されたサンプルに依存し，予測力の優劣の結論は得られなかった．

6. 結び

本稿は順序プロビット・モデルを多項プロビット・モデルに対して検定する手法を提案し，社債格付分析への応用例を報告したものである．選択肢が4以上の一般のケースへの拡張，検出力のより強い手法の探索，推定結果の経済学的解釈などいくつかの課題は残されているが，提案された検定は順序プロビット・モデルの定式化を吟味するための有益な手段になりうると考えられる．

引用文献

- 木島正明・小守林克哉 『信用リスク評価の数理モデル』朝倉書店, 1999年
- 中山めぐみ・森平爽一郎 「格付選択確率の推定と信用リスク量」JAFEE 1998 夏季大会予稿集, 210-225, 1998年
- 縄田和満 「多項プロビットモデルと順序プロビットモデルの関連について」, mimeo, 2000年
- 安川武彦 (1999) 「社債格付の決定要因に関するパネルデータ分析」, 筑波大学大学院 経営・政策科学研究科修士論文, 1999年
- Amemiya, T. *Advanced Econometrics*, Massachusetts, Harvard University Press, 1985.
- Blume, M.E., F. Lin, and A.C. MacKinlay, "The Declining Credit Quality of U.S. Corporate Debt: Myth and Reality," *Journal of Finance*, 53, 1389-1413, 1998.
- Cheung, Stella, "Provincial Credit Ratings in Canada: An Ordered Probit Analysis," Working paper 96-6, Bank of Canada, 1996.
- Cox, D. R. and D. V. Hinkley, *Theoretical Statistics*, London, Chapman and Hall, 1976.
- Ederington, L.H., "Classification Models and Bonds Ratings," *The Financial Review*, 20, 237-262, 1985.
- Greene, W., *Econometric Analysis*, 3rd ed., Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1997.
- Kaplan, R. S. and G. Urwitz, "Statistical Models of Bond Ratings: A Methodological Inquiry," *Journal of Business*, 52, 231-261, 1979.
- McCullagh, P., "Regression Models for Ordinal Data," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 42, 109-142, 1980.

補論

第3章の命題における帰無仮説，すなわち $\rho = -1$, $\sigma = 1$ かつ $\eta = -\beta$ のとき，対数尤度の導関数は次のように求められる．表記の簡便のため，まず

$$\mu = -\alpha - \beta'x, \tau = -\gamma - \eta'x \quad (\text{A.1})$$

とする．相関を持つ確率変数 e_A, e_C は，互いに独立な標準正規変数 u, v を用いて，

$$e_A = u, e_C = \sigma[\rho u + (1-\rho^2)^{1/2}v] \quad (\text{A.2})$$

と表される．ここで

$$\begin{aligned} \vartheta(u) &= (1-\rho^2)^{-1/2}[(u+\tau-\mu)/\sigma-\rho u], \\ \Psi(u) &= (1-\rho^2)^{-1/2}(\tau/\sigma-\rho u), \\ \Omega(u) &= (1-\rho^2)^{-1/2}(u\sigma+\mu-\tau-\rho u) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

とすると，カテゴリ-A,B,C が選ばれる確率は

$$\begin{aligned} P_A &= \Pr(-\mu + e_A > 0, -\tau + e_C < -\mu + e_A) = \int_{\mu}^{\infty} \int_{-\infty}^{\vartheta(u)} \phi(v)\phi(u)dvdu, \\ P_B &= \Pr(-\tau + e_C < 0, -\mu + e_A < 0) = \int_{-\infty}^{\mu} \int_{-\infty}^{\Psi(u)} \phi(v)\phi(u)dvdu, \\ P_C &= \Pr(-\tau + e_C > 0, -\tau + e_C > -\mu + e_A) = \int_{\tau\sigma}^{\infty} \int_{-\infty}^{\Omega(u)} \phi(v)\phi(u)dvdu \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と表される．対数尤度の導関数は P_A と P_B と P_C の微係数より

$$\partial\lambda/\partial\mu = y_A(\partial P_A/\partial\mu)/P_A + y_B(\partial P_B/\partial\mu)/P_B + y_C(\partial P_C/\partial s\mu)/P_C \quad (\text{A.5})$$

として求められる．

(1) $1/\sigma$ についての微係数

ここでは計算の便宜上から σ ではなく $s=1/\sigma$ について対数尤度の微係数を求めることにする．まず $\omega(\rho)=(1+\rho)/2$ とおくと，

$$\begin{aligned} \partial P_A/\partial s &= \int_{\mu}^{\infty} (\partial\vartheta(u)/\partial s)\phi(\vartheta(u))\phi(u)du \\ &= \int_{\mu}^{\infty} (u+\tau-\mu) [2\pi\omega(\rho)]^{-1/2} \exp(-(1/2)\omega(\rho)^{-1}[u + (\tau-\mu)/2]^2) du \\ &= 2^{-1/2}(1-\rho)^{-1/2}(2\pi)^{-1/2} \exp(-(1/4)(1-\rho)^{-1}(\tau-\mu)^2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる．相関係数 ρ が -1 に収束したとき，密度関数

$$\delta(u) = [2\pi\alpha(\rho)]^{-1/2} \exp(-(1/2)\alpha(\rho)^{-1}[u + (\tau - \mu)/2]^2)$$

は退化し， $u = -(\tau - \mu)/2$ にすべての確率が集中する．したがって，仮定 $\tau + \mu > 0$ より， $-(\tau - \mu)/2$ は区間 (μ, ∞) に含まれることから，(A.6)の積分は， $f(u)$ 以外の部分の u に $-(\tau - \mu)/2$ を代入すればよいこととなる．したがって，帰無仮説のもとで

$$\begin{aligned} \partial P_A / \partial s &= (\tau - \mu)(1/4)(2\pi)^{-1/2} \exp(-(1/8)(\tau - \mu)^2) \\ &= (\tau - \mu)(1/4)\phi((\tau - \mu)/2) \end{aligned} \quad (A.7)$$

が導かれる．

同様にして，

$$\begin{aligned} \partial P_B / \partial s &= \int_{-\infty}^{\mu} (\partial \Psi(u) / \partial s) \phi(u) \phi(\Psi(u)) du \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} \phi(u) \phi((1 - \rho^2)^{-1/2}(\tau s - \rho u)) du (1 - \rho^2)^{-1/2} \tau \\ &= (2\pi)^{-1} (1 - \rho^2)^{-1/2} \tau \int_{-\infty}^{\mu} \exp(-(1/2)(1 - \rho^2)^{-1}[(u - \tau\rho)^2 + (1 - \rho^2)\tau^2]) du \\ &= \tau(2\pi)^{-1/2} \exp(-(1/2)\tau^2) (2\pi)^{-1/2} (1 - \rho^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\mu} \exp(-((1/2)(1 - \rho^2)^{-1}(u - \tau\rho)^2)) du \end{aligned} \quad (A.8)$$

を得る．相関係数 ρ が -1 に収束するにつれ，

$$(2\pi)^{-1/2} (1 - \rho^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\mu} \exp(-((1/2)(1 - \rho^2)^{-1}(u - \tau\rho)^2)) du$$

は 1 に収束することから 帰無仮説のもとで

$$\partial P_B / \partial s = \phi(\tau)\tau \quad (A.9)$$

を得る．さらに，恒等式 $\partial P_A / \partial s + \partial P_B / \partial s + \partial P_C / \partial s = 0$ より

$$\partial P_C / \partial s = -\phi(\tau)\tau - (\tau - \mu)(1/4)\phi((\tau - \mu)/2) \quad (A.10)$$

を得る．

(2) α, γ, β と $\Delta = \beta + \eta$ についての微係数

ここで $\alpha(\rho) = (1 + \rho)/2$ とおくことにより，確率 P_A の μ についての微係数は

$$\begin{aligned} \partial P_A / \partial \mu &= -\phi(\mu) \int_{-\infty}^{\vartheta(\mu)} \phi(v) dv + \int_{\mu}^{\infty} \phi(\vartheta(u)) \phi(u) \partial \vartheta(u) / \partial \mu du \\ &= -\phi(\mu) \Phi(\vartheta(\mu)) - (1 - \rho^2)^{-1/2} \int_{\mu}^{\infty} \phi(\vartheta(u)) \phi(u) du \\ &= -\Phi(\vartheta(\mu)) \phi(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (2\pi)^{-1/2} [2(1-\rho)]^{-1/2} 2^{1/2} \exp(- (1/4)(1-\rho)^{-1}(\tau-\mu)^2) \\
& (2\pi)^{-1/2} \omega(\rho)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp((-1/2)\omega(\rho)^{-1}[u+(\tau-\mu)/2]^2) du
\end{aligned} \tag{A.11}$$

と表される．相関係数 ρ が -1 に収束すると $\omega(\rho)$ は 0 に収束し，第二項は 0 となり，密度関数

$$(2\pi)^{-1/2} \omega(\rho)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp((-1/2)\omega(\rho)^{-1}[u+(\tau-\mu)/2]^2) du$$

は一点 $-(\tau-\mu)/2$ に退化する．また相関係数 ρ が -1 に収束すると， $\vartheta(\mu)=(1-\rho^2)^{-1/2}(\tau+\mu)$ が無限大になることから， $\Phi(\vartheta(\mu))$ は 1 に収束する．したがって，

$$\partial P_A / \partial \mu = -\phi(\mu)$$

を得る．

また， P_B の μ についての導関数は

$$\partial P_B / \partial \mu = (\partial / \partial \mu) \int_{-\infty}^{\mu} \int_{-\infty}^{\Psi(u)} \phi(u) \phi(v) dv du = \phi(\mu) \Phi(\Psi(\mu))$$

と表現される．したがって， $\sigma=1$ かつ ρ が -1 に収束するとき $\Phi(\Psi(\mu))$ は 1 に収束するので，

$$\partial P_B / \partial \mu = \phi(\mu)$$

が得られ，恒等式 $\partial P_A / \partial \mu + \partial P_B / \partial \mu + \partial P_C / \partial \mu = 0$ より

$$\partial P_C / \partial \mu = 0$$

が得られる．

パラメータ μ と τ の対称性から，

$$\partial P_A / \partial \tau = 0, \quad \partial P_B / \partial \tau = \phi(\tau), \quad \partial P_C / \partial \tau = -\phi(\tau)$$

がいえ．さらに

$$(\partial P_A / \partial \mu)(\partial \mu / \partial \alpha) = (-1) \partial P_A / \partial \mu, \quad \mu = -\alpha - \beta'x, \quad \tau = -\gamma + (\beta - \Delta)'x$$

などの関係から，

$$\begin{aligned}
& \partial P_A / \partial \alpha = \phi(\mu), \quad \partial P_B / \partial \alpha = -\phi(\mu), \quad \partial P_C / \partial \alpha = 0, \\
& \partial P_A / \partial \gamma = 0, \quad \partial P_B / \partial \gamma = -\phi(\tau), \quad \partial P_C / \partial \gamma = \phi(\tau)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

を導くことは容易である．同様の議論により次の結果を得る．

$$\begin{aligned}\partial P_A / \partial \beta &= (\partial P_A / \partial \mu - \partial P_A / \partial \tau)(-x) = \phi(\mu)x, \quad \partial P_B / \partial \beta = (\partial P_B / \partial \mu - \partial P_B / \partial \tau)(-x) = -(\phi(\mu) - \phi(\tau))x, \\ \partial P_C / \partial \beta &= (\partial P_C / \partial \mu - \partial P_C / \partial \tau)(-x) = -\phi(\tau)x, \\ \partial P_A / \partial \Delta &= \partial P_A / \partial \tau(-x) = 0, \quad \partial P_B / \partial \Delta = \partial P_B / \partial \tau(-x) = -\phi(\tau)x, \quad \partial P_C / \partial \Delta = \partial P_C / \partial \tau(-x) = \phi(\tau)x.\end{aligned}\tag{A.13}$$

(3) ρ についての導関数

まず， $\partial \vartheta(u) / \partial \rho = (1-\rho^2)^{-3/2}[\rho(-\mu + \tau) + (\rho-1)u]$ より，

$$\partial P_A / \partial \rho = (1-\rho^2)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \phi((1-\rho^2)^{-1/2}[-\mu + \tau + (1-\rho)u]) [\rho(-\mu + \tau) + (\rho-1)u] du$$

を得る．ここで，

$$A(u) = (1-\rho^2)^{-1}[\rho(-\mu + \tau) + (\rho-1)u],$$

$$B(u) = -(1-\rho^2)^{-1}(1-\rho)[u + (\tau - \mu)/2]^2,$$

$$C = \exp((-1/4)(1-\rho^2)^{-1}(1+\rho)(\tau - \mu)^2).$$

若干の計算の後，

$$\partial P_A / \partial \rho = (2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} C \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \exp(B(u)) du$$

を得る．さらに $A(u) = B'(u)/2 + (1-\rho^2)^{-1}(\tau - \mu)(1+\rho)/2$ を利用することにより，この式は

$$\begin{aligned}\partial P_A / \partial \rho &= (2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} C \left[\int_{-\infty}^{\infty} B'(u) (1/2) \exp(B(u)) du + (1-\rho^2)^{-1}(\tau - \mu)(1+\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(B(u)) du \right]\end{aligned}$$

と展開できる．最初の積分は部分積分により，

$$- (1/2)(2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} \exp(B(\mu))$$

と表される．ただし，ここで

$$B(\mu) \equiv -(1-\rho^2)^{-1}(1-\rho)(\tau + \mu)^2/4$$

とおく． ρ が -1 に近づくととき，

$$\begin{aligned}& | (1-\rho^2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(B(u)) du / \int_{-\infty}^{\infty} B'(u) \exp(B(u)) du | \\ & < (1-\rho^2)^{-1}(1+\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(B(u)) du / |B'(\mu)| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(B(u)) du\end{aligned}$$

$$= (1-\rho^2)^{-1}(1+\rho)/[(1-\rho^2)^{-1}(1-\rho)(\tau+\mu)] \rightarrow 0$$

と0に収束するため、第二の積分は第一の積分と比べると無視できる大きさである。

したがって、

$$\partial P_A / \partial \rho = - (1/2)(2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} \exp((-1/2)(1-\rho^2)^{-1}(\mu^2 + \tau^2 - 2\rho\tau\mu)) (1 + o(1)) \quad (\text{A.14})$$

を得る。対称性より次の式も得られる。

$$\partial P_D / \partial \rho = \partial P_A / \partial \rho. \quad (\text{A.15})$$

表 1 : モンテカルロ実験によるサイズと検出力

係数			Pr(T> $\chi^2_{0.90}$)	Pr(T> $\chi^2_{0.95}$)
ρ	σ	$\beta + \eta$		
帰無仮説				
-1.0	1.0	0.0	0.1305	0.0665
対立仮説				
-1.0	1.0	0.1	0.2430	0.1465
-1.0	1.0	0.2	0.6200	0.4900
-1.0	1.0	0.3	0.8305	0.7450
-1.0	0.8	0.0	0.5280	0.4000
-1.0	1.4	0.0	0.8030	0.6965
-0.5	1.0	0.0	0.1655	0.0910
0.0	1.0	0.0	0.2470	0.1680
0.5	1.0	0.0	0.6255	0.5210

注意：繰り返しの数は 2,000 で，標本の大きさは 400 とした． $\chi^2_{0.90}$, $\chi^2_{0.95}$ は自由度 3 のカイ自乗分布の 90%, 95% を示す．

表 2 : 順序プロビット・モデルによる推定結果

変数	係数	標準誤差	t値	P-VALUE
キャッシュフロー	1.76641	.156726	11.2707	[.000]
有利子負債キャッシュフロー倍率	.070130	.012675	5.53279	[.000]
自己資本比率	.071478	.00965321	7.40455	[.000]
総資本事業利益率	.084944	.048629	1.74676	[.081]
インタレストカバレッジ	.00117034	.00744124	.157278	[.875]
経常収支比率	-.00434520	.00232833	-1.86623	[.062]
第 1 の閾値	21.8571			
第 2 の閾値	18.5498			

注意：推定された順序プロビット・モデルでは，潜在変数（係数×説明変数の総和）と攪乱項の和が第 1 の閾値をこえると AA 以上の評価となり，潜在変数が第 1 の閾値と第 2 の閾値の間なら，A の評価となり，潜在変数が第 2 の閾値以下なら，BBB 以下の評価が与えられるという想定である．攪乱項を 0 とおいたときに属するカテゴリーを予測値とし，実際のカテゴリーから一致率を計算した．

表3：多項プロビット・モデルの推定結果

変数	係数	標準誤差	t値	P-VALUE
格付 AA 以上に対応する潜在変数				
定数	-25.7660	3.41209	-7.55137	[.000]
キャッシュフロー	2.01313	.266303	7.55956	[.000]
有利子負債キャッシュ ロー倍率	.099380	.043625	2.27806	[.023]
自己資本比率	10.4635	1.91737	5.45720	[.000]
総資本事業利益率	29.1298	6.43447	4.52714	[.000]
インタレストカバレッジ	-.035342	.015470	-2.28461	[.022]
経常収支比率	-.010548	.372426E-02	-2.83231	[.005]
格付 BBB 以下に対応する潜在変数				
定数	19.3384	2.31975	8.33641	[.000]
キャッシュフロー	-1.82689	.207658	-8.79760	[.000]
有利子負債キャッシュ ロー倍率	-.071509	.014092	-5.07448	[.000]
自己資本比率	-6.76898	1.17757	-5.74825	[.000]
総資本事業利益率	-1.99675	1.74336	-1.14535	[.252]
インタレストカバレッジ	-.013667	.867310E-02	-1.57575	[.115]
経常収支比率	.209839E-04	.361595E-02	.580316E-02	[.995]

図 1 : 対立仮説のもとでの攪乱項の分布と選択肢

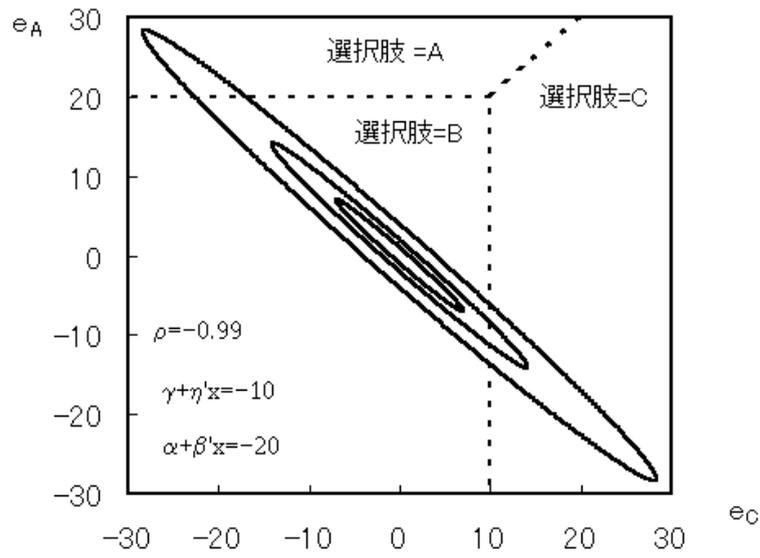
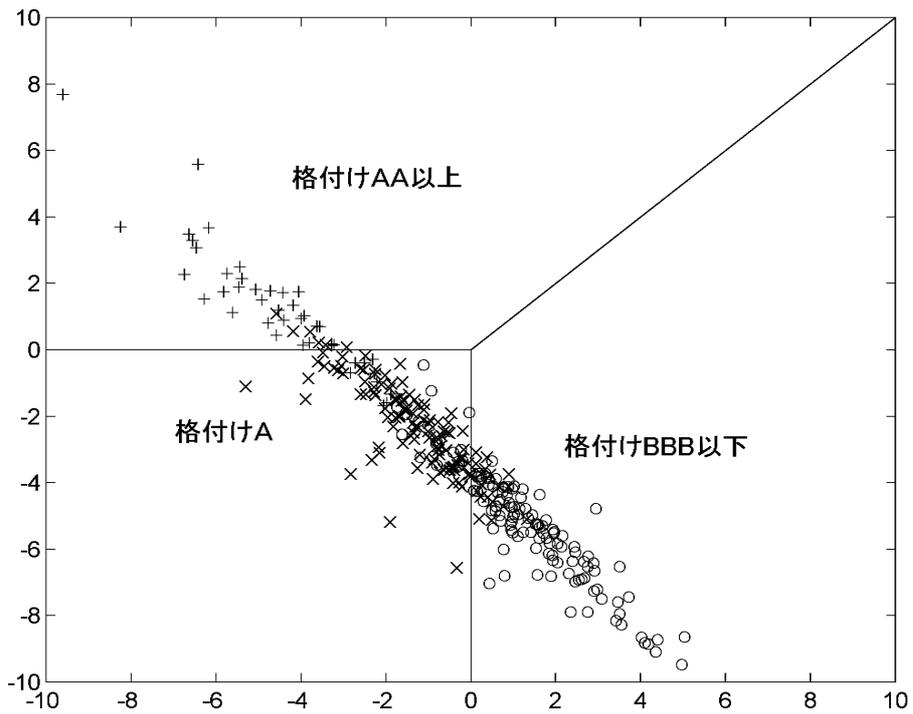


図2: 指標と格付け評価の分布



注意: 実際の格付けがAA以上は+, Aはx, BBB以下はoで表示.
縦軸はAA以上に対応する指標, 横軸はBBB以下に対応する指標を示す.

図3: (σ, ρ) についての concentrated log likelihood のプロット

