

IMES DISCUSSION PAPER SERIES

与信ポートフォリオにおける  
信用リスクの簡便な算出方法

いえだ あきら まるも こうへい よしば としなお  
家田 明・丸茂幸平・吉羽要直

Discussion Paper No. 2000-J-5

IMES

INSTITUTE FOR MONETARY AND ECONOMIC STUDIES  
BANK OF JAPAN

日本銀行金融研究所

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

**備考：** 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズは、金融研究所スタッフおよび外部研究者による研究成果をとりまとめたもので、学界、研究機関等、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図している。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。

## 与信ポートフォリオにおける 信用リスクの簡便な算出方法

いえだ あきら\*・まるも こうへい\*・よしば としなお\*

### 要 旨

与信ポートフォリオの信用リスク管理においては、バリュー・アット・リスクの枠組みで最大損失額を求めることが一般的であり、その際大規模なモンテカルロ・シミュレーションによって対応することが多い。しかしながら、こうしたシミュレーションには計算負荷が重いという問題がある。本稿では、こうした問題意識の下、シミュレーション負荷を抑え、近似的に最大損失額を算出する簡便な手法を提示し、計算例を示す。

具体的には、ポートフォリオを格付毎のサブポートフォリオに分け、サブポートフォリオの最大損失額を算出する。ここでは、サブポートフォリオの構成によって、その最大損失額と標準偏差との比があまり変動しないと仮定する。そこで、各エクスポージャーの金額が等しいサブポートフォリオ（均一サブポートフォリオ）を考える。標準偏差については、リスク計測の対象となるサブポートフォリオについても均一サブポートフォリオについても簡単な演算で求められる。また、均一サブポートフォリオの最大損失額についてはシミュレーションによらず解析的に求めることができる。したがって、リスク計測対象サブポートフォリオの最大損失額は、均一サブポートフォリオの最大損失額と標準偏差の比にリスク計測対象サブポートフォリオの標準偏差を乗じることにより近似的に算出することができる。シミュレーション例により、極端な大口エクスポージャーが存在するような場合を除いて、この近似手法は有効であることが確認できる。また、サブポートフォリオの最大損失額の合計から与信ポートフォリオ全体の最大損失額を求める手法についても述べる。

キーワード：信用リスク、与信ポートフォリオ、モンテカルロ・シミュレーション、与信の集中・分散、デフォルト事象の相関

JEL classification: G21

\* 日本銀行 金融研究所 研究第1課

(E-mail: akira.ieda@boj.or.jp, kouhei.marumo@boj.or.jp, toshinao.yoshiba@boj.or.jp)

本稿は、2000年1月から2月にかけて日本銀行で開催された「リスク計量に関する新たな取り組み」をテーマとする研究ワークショップへの提出論文に加筆・修正を施したものである。本稿の作成を開始するに当たっては、米山正夫氏（日本銀行信用機構室）との議論が大変有益であった。また本稿作成過程では、小林正人教授（横浜国立大学）、森平爽一郎教授（慶應義塾大学）をはじめ、同ワークショップ参加者から貴重なコメントを多数頂戴した。記して感謝したい。

## 目 次

1 . はじめに	1
2 . ポートフォリオの信用リスクの管理・計量の枠組み	2
2 - 1 ポートフォリオの信用リスク管理の枠組み	2
( 1 ) 信用格付制度	2
( 2 ) 信用リスクの計量手法の概要	3
2 - 2 信用リスクの計量手法とその問題点	4
( 1 ) 損失概念の定義 ( デフォルト・モードと MTM )	4
( 2 ) シミュレーションによる最大損失額の算出	5
( 3 ) シミュレーションの問題点	6
3 . 信用リスクの簡便な計量手法の枠組み	6
3 - 1 標準偏差ベースでのリスク計量アプローチ	6
( 1 ) 枠組みの概要	6
( 2 ) 与信の分散・集中がリスクに与える影響	7
( 3 ) デフォルト事象の相関	9
3 - 2 最大損失額との関係	11
( 1 ) 最大損失額の簡便な計量手法 ( 標準偏差による近似手法 )	11
( 2 ) 近似手法の限界と現実のポートフォリオを踏まえた評価	13
4 . シミュレーションと考察	14
4 - 1 シミュレーション手法の解説	14
( 1 ) ベルヌーイ乱数の発生手法	14
( 2 ) デフォルト事象の相関	16
( 3 ) サンプル・ポートフォリオの説明	18
( 4 ) シミュレーション手法の詳細	21
4 - 2 シミュレーション結果及び考察	22
( 1 ) サブポートフォリオ毎のシミュレーション	22
( 2 ) サンプル・ポートフォリオの UL の算出	27
( 3 ) ポートフォリオの UL の簡便な算出手法	28
5 . おわりに	29
( 補論 1 ) 均一ポートフォリオの最大損失額の解析的な算出方法	31
( 補論 2 ) デフォルト事象の相関係数の算出手法	34
( 参考文献 )	37

## 1. はじめに

内外の金融機関では、その業務の中で抱えているリスクの中心的存在である与信ポートフォリオの信用リスクについて、その計測手法や管理体制の整備及び充実化を進めている。そうした整備・拡充の具体的な方向性は、近年発展が目覚しい金融工学や統計学などの最新技術を活用し、コンピュータ・シミュレーションやあるいは解析的な手法を駆使することによって、より正確にリスク量を計測した上で、その結果を、金融商品の正確なプライシングや効率的な与信枠の決定、さらには自己資本の最適な配分等の銀行経営に活用していこうというものである。

与信ポートフォリオの信用リスク量の計測においては、市場リスクの場合と同様に VaR (バリュー・アット・リスク) の枠組みでポートフォリオから発生する最大損失額ないし予期しない損失額をモデルを用いて算出するのが一般的となっている。しかし、こうした信用リスクモデルによるリスク量の計測には幾つかの障害がある。まず、モデルの取扱いが、市場リスクの場合に比べて複雑である点である。つまり、信用リスクモデルでは、取扱いが簡単な(対数)正規性を仮定できないデフォルト事象を扱うほか、デフォルト率や回収率等のパラメータの計測や設定では特にデータの制約から取扱いに注意を要する部分が多い。さらには、シミュレーションに時間を要する点も挙げられる。信用リスクモデルでシミュレーションを行う場合、特に与信エクスポージャー数が数万~数十万の規模に達する金融機関では、計算負荷が膨大であるため、大規模なコンピュータを使用しても、リスク量等の計算結果を得るまでに長時間を要してしまうとの問題点がある。

本稿では、信用リスクモデルのこうした障害のうち、後者のシミュレーションに関連する問題点に焦点を当て、シミュレーションの実施を最小限に抑制しつつ、ポートフォリオのリスク量の大きさを把握する手法を提示しそれについての考察を行う。

本稿の構成は次の通りである。まず、第2章でポートフォリオの信用リスク管理の枠組みを概説する。次に、第3章で、簡便に信用リスク量を把握する手法の考え方を整理し、第4章で実際にその手法をサンプル・ポートフォリオに当てはめて、適用可能性を評価する。最後に、第5章で、本稿の総括を行う。

## 2. ポートフォリオの信用リスクの管理・計量の枠組み

### 2-1 ポートフォリオの信用リスク管理の枠組み

#### (1) 信用格付制度

国内外の多くの金融機関では、信用リスク管理を行う上での重要なインフラとして、内部で信用格付制度（いわゆる内部格付）を構築している<sup>1</sup>。その格付の形態としては、一般に、債務者のデフォルト率（例えば、先行き1年間のデフォルト率）を信用度評価の基準とする債務者ベースのもの（具体例を【図表1】に掲げた）と、案件毎に回収率や期待損失額などを考慮に入れたファシリティベースのものがある。ファシリティベースの格付制度においても、その格付付与過程では、債務者等の信用度も考慮することとなるほか、邦銀の場合、債務者ベースの格付が主体である<sup>2</sup>ことから、以下本稿では、債務者ベースの格付制度を前提に議論を進める。

【図表1】内部格付制度の具体例<sup>3</sup>

格付	リスクの程度	定義	自己査定 の債務者区分		
1	実質リスク無	債務履行の確実性は極めて高い状態にある。	正 常 先		
2	リ ス ク 僅 少	債務履行の確実性は高い状態にある。			
3	リ ス ク 少	債務履行の確実性は十分である。			
4	a	平均水準比 良 好		正 常 先	
	b				
	c				
5	a	平均水準			正 常 先
	b				
	c				
6	a	許 容 可 能 レ ベ ル			
	b				
	c				
7	平均水準比 低	債務履行は現在問題ないが、財務内容が相対的に低位にある。	要 注 意 先		
8	A 予 防 的 B 管 理 段 階	貸出条件・履行状況に問題、業況低調ないしは不安定等、今後の管理に注意を要する。			
9	重 要 管 理 段 階	今後、経営破綻に陥る可能性が大きいと認められる。	破 綻 懸 念 先		
10		I	深刻な経営難の状態にあり、実質的に経営破綻に陥っている。	実 質 破 綻 先	
	II	経営破綻に陥っている。	破 綻 先		

<sup>1</sup> 金融機関の内部格付制度の現状を纏めたものとしては、邦銀については、金融監督庁・FISC[1999]が、また米銀については、Treacy and Carey[1998]がある。

<sup>2</sup> 金融監督庁・FISC[1999]を参考にした。

<sup>3</sup> 金融監督庁・FISC[1999]から抜粋した。

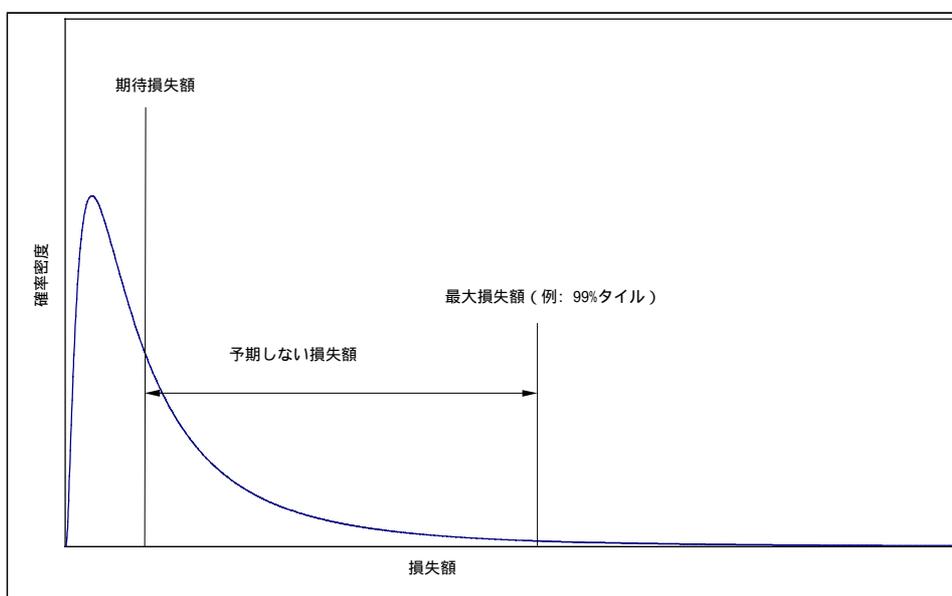
各債務者に割当てられた格付、すなわちデフォルト率は、信用リスク管理の基本となるものであり、それを基に、個々のエクスポージャーベースでは、貸出金利等の決定や与信枠の設定等が行われるほか、ポートフォリオベースでは、シミュレーション手法などを用いて、信用リスク量や内部管理上の必要自己資本額等の算出がなされる。

## (2) 信用リスクの計量手法の概要

信用リスクの計量を行う上で必要な入力情報は、各エクスポージャーについて、デフォルト率、エクスポージャー金額、回収率、他のエクスポージャーとの相関等である。

これらの入力情報を基に、シミュレーション等の手法によって、損失額の分布が得られ、損失額についての期待値（期待損失額）、分散、あるいは99%タイル等の最大損失額が算出される（【図表2】参照）。最大損失額から期待損失額を控除したものが、予期しない損失額であり、予期しない損失額は経済的自己資本（Economic capital）によってカバーされるべきであるというのが実務上の一般的な考え方となっている。

【図表2】 損失額分布の密度関数の概念図



## 2 - 2 信用リスクの計量手法とその問題点

### (1) 損失概念の定義 (デフォルト・モードと MTM)

信用リスクの計量化を行う場合、損失概念の定義が必要となる。バーゼル銀行監督委員会は、損失の定義として次の2つを挙げている<sup>4</sup>。一つは、リスク評価期間内に債務者のデフォルトが生じる場合にのみ損失が発生するものと定義されるデフォルト・モード方式であり、他方は、デフォルト以前の債務者の信用度 (格付) 低下も考慮する MTM (Mark-to-market) 方式である。例えば、ポートフォリオの損失額は、両方式では次のように表される。

#### A . デフォルト・モード方式

ポートフォリオに  $n$  個のエクスポージャーがあるとする。エクスポージャー  $i$  の将来のある時点までのデフォルト率を  $p_i$ 、エクスポージャー金額を  $v_i$ 、デフォルト時の回収率を  $r_i$  ( $0 \leq r_i \leq 1$ ) とする (いずれも確定値)<sup>5</sup>。このときポートフォリオの損失額  $L$  は、1 または 0 の値をとる確率変数

$$D_i = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p_i) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - p_i) \end{cases}$$

を使って

$$L = \sum_{i=1}^n D_i v_i (1 - r_i) \quad (2-1)$$

のように表すことが出来る。(2-1)式で表される損失額は離散的な値を取るが、 $n$  が十分大きく、とり得る値の間隔が十分に小さいような場合には連続分布のように扱うことが出来る。一方、 $L$  の期待値は

$$E[L] = \sum_{i=1}^n p_i v_i (1 - r_i)$$

のように求めることが出来る。

#### B . MTM 方式

エクスポージャー  $i$  の将来のある時点までに格付  $k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) に遷移する確率

---

<sup>4</sup> Basle Committee on Banking Supervision[1999]を参照。

<sup>5</sup> これらのパラメータについては、モデルの設定によっては確定値であると仮定されることも多いが、一般的にはいずれも不確実性を持つ。

を  $p_{k,i}$  ( $\sum_{k=1}^m p_{k,i} = 1$ )、格付  $k$  に遷移したときの現在時点の時価との差を  $dv_{k,i}$  とする

(時価には回収率がインプリシットに織り込まれているとする)。このときポートフォリオの損失額  $L$  は、 $1, \dots, m$  ( $m$  はデフォルト) の値を取る確率変数

$$D_i = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p_{1,i}) \\ \vdots & \vdots \\ m & (\text{確率 } p_{m,i}) \end{cases}$$

を使って、デフォルト・モード方式と同様、(2-2)式のように表すことができる。

$$L = \sum_{i=1}^n dv_{D_i,i} \quad (2-2)$$

この期待値は

$$E[L] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_{k,i} dv_{k,i}$$

で与えられる。

## (2) シミュレーションによる最大損失額の算出

ポートフォリオの信用リスクの計量化は、上述したように損失の概念を定義した上で、デフォルト率、エクスポージャー金額、相関等を入力パラメータ<sup>6</sup>として、一定の信頼区間の下でのポートフォリオの最大損失額を算出することによって行われる。最大損失額や予期しない損失額の算出方法は、一般的にはモンテカルロ・シミュレーションによって行われる。これは、特定の損失額分布を仮定することなく、モンテカルロ・シミュレーションによって多数の損失発生のサンプルを生成し、それらの損失額分布を生成することによって、最大損失額等を推定するアプローチである。この具体例としては、CreditMetrics (J.P.Morgan & Co.[1997]) が挙げられる<sup>7</sup>。

<sup>6</sup> モデルの構築においては、シミュレーション負担等のため、これらのパラメータは相互に独立であると仮定されることが多い。

<sup>7</sup> シミュレーションによるアプローチ以外では、解析的手法に基づくアプローチがある。これは、個別エクスポージャーの損失額分布等に仮定を与え、ポートフォリオ全体の損失額の分布を解析的に求めるアプローチである。この具体例は、CreditRisk+(Credit Suisse Financial Products[1997]) である。

### (3) シミュレーションの問題点

しかし、シミュレーションには時間がかかるという問題点がある。特にエクスポージャー数が数万～数十万の規模に達する金融機関では、計算負荷が膨大となるため、大規模なコンピュータを使用しても、リスク量等の計算結果を得るまでに長時間（場合によっては、数日）が必要となることもある。この点は、金融機関経営上、シミュレーション結果を基に、日々リスク量の変化を把握したり、プライシング等を行っている場合には、機動性の面で大きなネックとなり得ることとなる。

次章では、このようなシミュレーションの問題点を踏まえ、ポートフォリオのリスク量のある程度簡便に把握する手法の基本的な考え方を提示することとする。

## 3. 信用リスクの簡便な計量手法の枠組み

### 3-1 標準偏差ベースでのリスク計量アプローチ

#### (1) 枠組みの概要

与信ポートフォリオの最大損失額や予期しない損失額は、上述したように一般的には、損失額の分布をシミュレーションによって導出し、一定の信頼区間（例えば 99% タイル）を仮定した上で求められる。なお、以下では、便宜的に最大損失額と予期しない損失額を区別せずに UL (Unexpected loss) という記号で表すこととする。

ここでは、シミュレーションによって UL を求めるアプローチではなく、まずは損失額分布の標準偏差（これを、VL < Volatility of loss > と呼ぶこととする）を考える<sup>8</sup>。

なお、本稿では、損失の定義を「デフォルトした場合のみの簿価価値からの評価損」（デフォルト・モード方式）とし、格付の上げ下げに伴う市場価値変動の効果は捨象して考える。また、エクスポージャー金額と回収率についても、確定

---

<sup>8</sup> 市場リスクに関する VaR（分散・共分散法、モンテカルロ・シミュレーション法）の場合は、一般にリスクファクターの変動に（対数）正規性を仮定しているため、例えば 99% タイルの最大損失額は損失額の標準偏差の約 2.33 倍になるという関係があるが、信用リスクに関する VaR の場合、最大損失額が標準偏差の何倍になるかはアプリアリには与えられない点に注意を要する。

値とする。この場合エクスポージャー金額は、担保等によって回収が可能な金額を十分保守的に見積もった上で差引いた額とし、残りの部分の回収率は一律 0% であると仮定する。つまり、本稿でリスク評価の対象となるエクスポージャーは全て裸与信である。さらに、デフォルト率については、リスク評価期間を 1 年と想定し、1 年間の累積デフォルト率であるとする。

以下では、内部格付の基準であるデフォルト率は、各格付内で一定値であるとの仮定を置いた上で、各格付のサブポートフォリオのリスクを考察することとする。

## ( 2 ) 与信の分散・集中がリスクに与える影響

### A . デフォルト事象の相関が 0 である場合

まず、格付  $k$  を付与されたエクスポージャーのデフォルト率を一律に  $p_k$ 、格付  $k$  内のエクスポージャーを  $v_{k,i}$  ( $i=1,2,\dots$ ) とする。個々のエクスポージャーの VL を  $VL_{k,i}$  とすると、デフォルトはベルヌーイ事象であるので次のように与えられる。

$$VL_{k,i} = \sqrt{p_k(1-p_k)v_{k,i}^2} = \sqrt{p_k(1-p_k)}v_{k,i} \quad (3-1)$$

次に同一格付  $k$  のサブ・ポートフォリオの VL を  $VL_k$  とする。各エクスポージャーのデフォルト事象間の相関係数が 0 であると仮定すると

$$\begin{aligned} VL_k &= \sqrt{\sum_i p_k(1-p_k)v_{k,i}^2} = \sqrt{p_k(1-p_k)}\sqrt{\sum_i v_{k,i}^2} \\ &= \sqrt{p_k(1-p_k)}\sum_i v_{k,i} \frac{\sqrt{\sum_i v_{k,i}^2}}{\sum_i v_{k,i}} \end{aligned} \quad (3-2)$$

となる。 $\sqrt{\sum_i v_{k,i}^2} / \sum_i v_{k,i}$  (0 から 1 の間の数字をとる) は、格付  $k$  内に含まれるエクスポージャーの数を一定とすると、各エクスポージャーの大きさが等しい、均一なポートフォリオである場合にその水準は最低となる。また、与信の集中度が進むとその水準は 1 に近づく。したがって、 $\sqrt{\sum_i v_{k,i}^2} / \sum_i v_{k,i}$  はポートフォリオの集中・分散度合を表すファクターと考えることができ、本稿ではこれを Concentration factor(CF)と呼ぶことにする。

B．デフォルト事象の相関が0でない場合（A．の拡張）

格付 $k$ のデフォルト率を $p_k$ 、格付 $k$ 内の各エクスポージャーを $v_{k,i}$  ( $i=1,2,\dots$ )とする。同一格付のサブ・ポートフォリオの $VL_k$ は、エクスポージャー $i, j(i \neq j)$ のデフォルト事象に関する相関を $\rho_{ij}$ とすると、

$$VL_k = \sqrt{\sum_i VL_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} VL_{k,i} VL_{k,j}} \quad (3-3)$$

$$\text{ただし、} VL_{k,i} = \sqrt{p_k(1-p_k)v_{k,i}^2} = \sqrt{p_k(1-p_k)}v_{k,i}$$

となる。これは

$$\begin{aligned} VL_k &= \sqrt{\sum_i p_k(1-p_k)v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} p_k(1-p_k)\rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}} \\ &= \sqrt{p_k(1-p_k)} \sqrt{\sum_i v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}} \\ &= \sqrt{p_k(1-p_k)} \sum_i v_{k,i} \sqrt{\sum_i v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}} / \sum_i v_{k,i} \\ &= \sqrt{p_k(1-p_k)} \sum_i v_{k,i} \frac{\sqrt{\sum_i v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}}}{\sum_i v_{k,i}} \quad (3-4) \end{aligned}$$

と変形することができる。

(3-4)式右辺の最後の $CF \times$ の部分、“拡張 Concentration factor”(拡張 CF)と呼ぶこととする。

$$\text{拡張 Concentration factor} = \sqrt{\frac{\sum_i v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}}{(\sum_i v_{k,i})^2}} \quad (3-5)$$

さて、(3-4)式の $CF \times$ の部分(拡張 CF)で注意しなければならないのは、 $CF$ と $\frac{\sum_i v_{k,i}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij}v_{k,i}v_{k,j}}{(\sum_i v_{k,i})^2}$ の部分とを分離して考えてはいけない点である。例えば、ポートフォリオの分散化が進むと $CF$ はゼロに近付いていくこととなるが、その際全てのエクスポージャー間のデフォルト相関が1となる場合を想定すると、拡張 $CF$ は常に1となる訳で、単に分散化しているという面を捉えただけではリスク量が抑制されているとはいえないことになる。したがって、エクスポージャー間のデフォルトの相関がゼロでない通常のポートフォリオの場合には、拡張 $CF$ でポートフォリオの集中・分散度合を評価することが必要であるといえる。

### (3) デフォルト事象の相関

エクスポージャー間のデフォルト事象の相関係数は、例えば株価の相関係数を利用して推定することが可能である<sup>9</sup>が、エクスポージャーの個数が多くなると、全てのペアについて相関係数を求めることは作業的に容易ではない。しかし、仮に、相関係数の平均的な水準として $\rho$ が与えられているとすると、拡張 CF は次のようになる。

$$\text{拡張 Concentration factor} = \sqrt{\frac{\sum_i v_{k,i}^2 + 2\rho \sum_{i<j} v_{k,i} v_{k,j}}{(\sum_i v_{k,i})^2}} \quad (3-6)$$

#### A. 均一ポートフォリオの場合

格付 $k$ のポートフォリオが $n$ 個の同一金額のエクスポージャーから構成される均一ポートフォリオであると仮定すると、(3-6)式の拡張 CF は簡単な計算<sup>10</sup>により次式で表すことができる。

$$\text{拡張 Concentration factor} = \sqrt{\rho + \frac{1-\rho}{n}} \quad (3-7)$$

拡張 CF が $n$ 及び $\rho$ の水準にどのように依存するかをみるために、【図表3】を作成した。

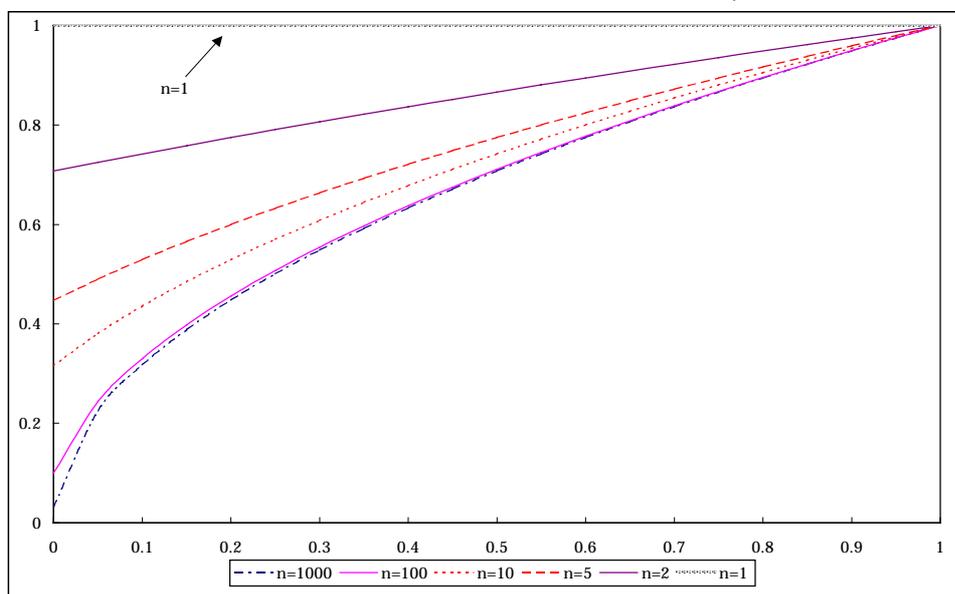
---

<sup>9</sup> 例えば、CreditMetrics ではこの手法が採用されている。これを含めたデフォルト事象の相関係数の算出手法については、補論2で解説を加える。

<sup>10</sup> (3-6)式において全ての $i$ について $v_{k,i} = v_k$  (均一ポートフォリオ)と置くと、内の分子、分母ともに $v_k^2$ が括り出せて $v_k$ の項がキャンセル・アウトし、(3-7)式のようになる。

【図表3】 拡張 CF と  $n$ 、 $\rho$  の関係（均一ポートフォリオの場合）

横軸： $\rho$ 、縦軸：拡張 CF



ここからわかることは、以下の通りである。

拡張 CF は  $\rho$  の増加関数である（ただし、 $n=1$  の時は、拡張 CF は 1 で不変）。

また、拡張 CF は  $n$  の減少関数である。 $n$  が約 100 超となる場合には、拡張 CF は  $\rho$  が 0 近傍の時を除いてほぼ同水準となる。さらに  $n \rightarrow \infty$  の時には、拡張 CF  $\rightarrow \sqrt{\rho}$  となる（すなわち、分散効果には  $\sqrt{\rho}$  という下限がある）。

$\rho$  が大きい時は、 $n$  が大きい場合でも、拡張 CF は 1 に近い値をとる。すなわち、エクスポージャー間の相関が大きい時は、表面上分散されている場合でも、拡張 CF で計ると、それほど分散効果が効いていないことになる。

## B . 不均一ポートフォリオの場合

次に不均一ポートフォリオの場合を考える<sup>11</sup>。エクスポージャー間のデフォルト事象の相関を考慮しない場合の Concentration factor を CF とすると、拡張 CF は簡単な計算<sup>12</sup>によって、

<sup>11</sup> リスクの計測対象となる、実際に金融機関が保有するポートフォリオは、一般的には不均一である。

<sup>12</sup> この計算には、 $(\sum_i v_{k,i})^2 = \sum_i v_{k,i}^2 + 2\sum_{i<j} v_{k,i}v_{k,j}$  という関係を使用した。

$$\text{拡張 Concentration factor} = \sqrt{\rho + CF^2(1-\rho)} \quad (3-8)$$

となることがわかる。(3-8)式から、格付毎の CF、 $\rho$  の2つのパラメータに関する情報があれば、拡張 CF が計算できることになる。上述の通り、ポートフォリオのエクスポージャー額とエクスポージャー個数が一定であるとする、拡張 CF (及び CF) はポートフォリオが均一である場合に最低となる。すなわち、ポートフォリオが不均一の場合、拡張 CF は  $\sqrt{\rho + (1-\rho)/n}$  と 1 の間の値をとる (CF は、 $1/\sqrt{n}$  と 1 の間の値をとる)。

そこで、実際に拡張 CF の算出を試みる。まず、100 個のエクスポージャーからなるポートフォリオを想定する (均一ポートフォリオの場合、CF は最低値 0.1 をとる)。 $\rho$  については一例として 0.15 とし、CF については 0.1~0.7 (0.1 刻み) に設定すると、拡張 CF は、【図表 4】のような値となる。これをみると、CF が相対的に低く (0.1~0.3) 表面的に分散が進んでいるような場合、 $\rho$  の効果を勘案した拡張 CF は CF の 4.0~1.6 倍程度となっている。したがって、 $\rho$  を勘案しないとポートフォリオのリスク量の分散効果を数分の 1 程度に低く見積もってしまうことになる。

【図表 4】CF と拡張 CF の関係 ( $\rho=0.15$ )

CF (a)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
拡張 CF (b)	0.39812	0.42895	0.47592	0.53479	0.60208	0.67528	0.75266
(b) / (a)	3.98	2.14	1.59	1.34	1.20	1.13	1.08

### 3 - 2 最大損失額との関係

#### (1) 最大損失額の簡便な計量手法 (標準偏差による近似手法)

本節では、上記の考え方に基づいた上で、簡便な格付毎の UL の算出手法を提示する。上述の通り通常は、UL は、損失額の分布をモデルによるシミュレーションで導出した上で、一定の信頼区間 (例えば 99% タイル) を仮定して求められる。しかし、膨大な数のエクスポージャーを含むポートフォリオでシミュレーションを行う場合、非常に長い時間を要するという点がネックとなる。

そこで、ポートフォリオの UL を求める必要がある場合、モデルを使ったシミュレーションをその都度行うのではなく、各格付毎の均一ポートフォリオの UL を予め算出しておき<sup>13</sup>、リスク計測対象ポートフォリオ (不均一ポートフォリオ)

<sup>13</sup> 計算の際、均一ポートフォリオの UL は解析的に求めることができるが、本稿ではシミュ

の拡張 CF と均一ポートフォリオの拡張 CF の比で近似出来るとみなしてリスク計測対象ポートフォリオの UL を算出するという手法が考えられる。すなわち、リスク計測対象ポートフォリオについて時間のかかるシミュレーションを行わずに、UL を近似的に求めてしまうというのが基本的なアイデアである。

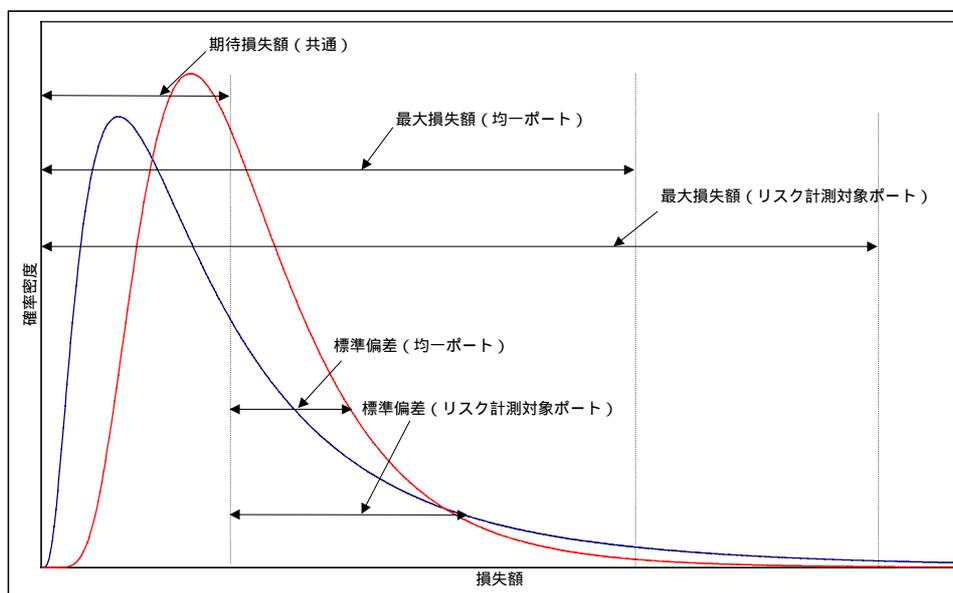
具体的には、以下のとおりである。

まず、同格付（同デフォルト率）・同金額の  $n$  個のエクスポージャーから構成される均一ポートフォリオ<sup>14</sup>について、デフォルト事象の相関係数  $\rho$  を一定と仮定した上で、UL を計算する。

リスク計測対象ポートフォリオの UL は、同一格付の均一ポートフォリオの拡張 CF（(3-7)式）とリスク計測対象ポートフォリオの拡張 CF（(3-8)式）を使って、均一ポートフォリオとリスク計測対象ポートフォリオの VL の比が、UL の比と同一であるとみなせると仮定して、(3-9)式で近似的に求める。

$$\text{リスク計測対象ポートの UL} \cong \frac{\sqrt{\rho + CF^2(1-\rho)}}{\sqrt{\rho + \frac{1-\rho}{n}}} \times \text{均一ポートの UL} \quad (3-9)$$

【図表 5】均一ポートとリスク計測対象ポートの最大損失額と標準偏差



レーションによる数値を利用した。均一ポートフォリオの UL を解析的に求めるやり方等詳細は補論 1 参照。

<sup>14</sup>  $n$  は十分大きな値とする。

もしこの近似が十分な精度を確保できるならば、リスク計測対象ポートフォリオの不均一さが変わったとしても、エクスポージャー個数  $n$  が不変である場合や  $n$  の増減が無視できるような場合（例えば、 $1/n \ll 1$  など）には、エクスポージャー個数  $n$  の均一ポートフォリオで一度 UL を算出しておくだけで、(3-9)式によってリスク計測対象ポートフォリオの UL を近似計算によって簡単に求めることができるというメリットがある（CF は極く簡単に算出できる）。

こうした近似手法が実際にどの程度の精度を確保できるか否かについては、次章で検討することとする。

## （２）近似手法の限界と現実のポートフォリオを踏まえた評価

### A．近似手法の限界

上記近似手法のフィジビリティを検討する前に、ここでは同手法の限界について述べておく。

この手法は、均一ポートフォリオとリスク計測対象ポートフォリオにおいて、UL と拡張 CF の比が余り大きく変わらないとの仮定の下、均一ポートフォリオにおける UL / 拡張 CF 比を基準に、リスク計測対象ポートフォリオの拡張 CF からその UL を求めようというものである。したがって、ポートフォリオの構成が、基準となる均一ポートフォリオと極端に異なるようなものについては、UL / 拡張 CF 比が均一ポートフォリオのものから大きくずれてしまい、このような近似が使えない可能性がある。例としては、大口エクスポージャーが含まれているリスク計測対象ポートフォリオが挙げられる。後述のシミュレーションでも示すように、リスク計測対象ポートフォリオの中で一部の先に与信が極端に集中しているポートフォリオの UL を上記近似手法で求めた場合、それはシミュレーションによって求めた UL と大きく異なる場合がある。

また、 $n$  が余り大きくないような場合など、損失額分布を連続とみなせないような場合には、この近似がうまく行かない可能性がある。

これら二つの場合に共通するのは、ポートフォリオに大口エクスポージャーが含まれることである。CF を用いて UL を近似しようとする上記手法は、大口エクスポージャーが UL に与える影響を完全には取込みきれない可能性がある。

### B．現実のポートフォリオを踏まえた評価

本邦金融機関の場合、貸出先の大宗が中堅・中小企業群であるため、内部格付制度上の各格付段階に含まれる与信先数が極端に少なくなることは少ないと

考えられる<sup>15</sup>こと、そもそも内部管理上設定された与信枠によって極端に大口のエクスポージャーの存在が制限されていること、が考えられる。したがって、現実の金融機関のポートフォリオ構成を踏まえると、A. で述べたような限界は、多くの場合問題にならないことが予想される。

#### 4 . シミュレーションと考察

前章で述べた近似手法の有効性を検討するために、本稿ではポートフォリオの最大損失額を求めるシミュレーションを行い、近似手法との比較を行った。前章までに述べてきたように、シミュレーションによる最大損失額の算出は煩雑なものであり、4 - 1 では、その手法の詳細を述べる。4 - 2 では、その結果を示し考察を行う。

##### 4 - 1 シミュレーション手法の解説

###### ( 1 ) ベルヌーイ乱数の発生手法

確率変数が ( 対数 ) 正規分布に従うのであれば、シミュレーションの際に発生させる多変量正規乱数は、分散・共分散行列をコレスキー分解することを通じて、容易に得ることができる。しかしながら、本稿で採用しているデフォルト・モード方式ではデフォルトか非デフォルトかというベルヌーイ分布を想定しているので、コレスキー分解を単純に適用することはできない。そこで、以下では、多変量ベルヌーイ乱数を発生させる手法を示す。

###### A . デフォルト率・デフォルト相関が等しい場合

個々のエクスポージャーの金額及びデフォルト率が等しい与信ポートフォリオを考える。個々のエクスポージャー間のデフォルト相関も一律であるとする。

まず、次のベルヌーイ分布に従う確率変数  $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を考える。

$$D_i = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p) \\ 0 & (\text{確率 } 1-p) \end{cases} \quad (4-1)$$

すなわち、 $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$  は、ポートフォリオ (  $n$  個のエクスポージャーから構

---

<sup>15</sup> 現状のような景気低迷期には、結果的に高い格付を付与される企業数が少なくなることが考えられる。また、高い格付を付与される先は大企業が主体で、それらへのエクスポージャー金額は相対的に大口であることから、その点も当該格付についての UL 算出の障害になる可能性は否定しきれない。

成される)内のエクスポージャー*i*が確率  $p$  で1 (デフォルト)、確率  $1-p$  で0 (非デフォルト)という値をとる。さらに、各  $D_i$ の相関係数を  $\rho$  (一律)とする。上述したように、相関を考慮した多変量ベルヌーイ乱数を発生させるプロセスで、コレスキー分解を単純に適用することはできない。そこで、正規分布については、コレスキー分解が使えるという点に着目して、正規分布を介して、ベルヌーイ乱数を発生させる手法を考える。

まず、いずれも平均0、分散1の正規分布に従う確率変数  $X_i (i=1,2,\dots,n)$  を考える(ただし、各確率変数は独立ではなく、相関があるとする)。このとき、 $D_i$  は

$$D_i = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p)) \\ 0 & (\Phi^{-1}(p) < X_i < \infty) \end{cases} \quad (4-2)$$

ただし、 $\Phi^{-1}(\cdot)$  は標準正規分布の累積密度関数の逆関数

と表すことができる。

$D_i (i=1,2,\dots,n)$ 間の相関係数が  $\rho$  になるためには、 $X_i (i=1,2,\dots,n)$ 間の相関係数  $\tilde{\rho}$  を適当に定めればよい。 $\rho$  は

$$\rho = \frac{E[D_i D_j] - p^2}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{p(1-p)}} \quad (4-3)$$

と表される。ここで

$$D_i D_j = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p), -\infty < X_j \leq \Phi^{-1}(p)) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \quad (4-4)$$

であるので、 $E[D_i D_j]$  は、相関係数  $\tilde{\rho}$  を持つ2次元正規分布の累積密度関数

$$E[D_i D_j] = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2)}\{x_i^2 + x_j^2 - 2\tilde{\rho}x_i x_j\}\right) dx_i dx_j \quad (4-5)$$

となる。

したがって、(4-5)式と(4-3)式から、(4-3)式を満たす  $\tilde{\rho}$  を得ることが可能である(ただし、上記定積分の値は数値計算によって求める必要がある)。

以上によって、平均0、分散1、かつ一律  $\tilde{\rho}$  の相関係数を持つ  $n$ 次元の多変量正規乱数を発生させ、(4-2)式によって  $D_i$  を求めれば、目的の多変量ベルヌーイ乱数を得ることができる。

## B. デフォルト率・デフォルト相関が異なる場合

ポートフォリオ内のエクスポージャー*i*のデフォルト・非デフォルトを、A. と同様ベルヌーイ乱数 $D_i$ で表すが、 $i \neq j$ のとき、それぞれのデフォルト率 $p_i, p_j$ が等しいとは限らず、またこれらエクスポージャーのデフォルト事象の相関係数 $\rho_{ij}$ も一定とは限らない場合を考える。この場合の乱数発生法は以下の通りである。

まず、 $D_i, D_j (i \neq j)$ は、標準正規分布に従う確率変数 $X_i, X_j$ を使って、

$$D_i = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_i \leq \Phi^{-1}(p_i)) \\ 0 & (\Phi^{-1}(p_i) < X_i < \infty) \end{cases} \quad (4-6)$$

$$D_j = \begin{cases} 1 & (-\infty < X_j \leq \Phi^{-1}(p_j)) \\ 0 & (\Phi^{-1}(p_j) < X_j < \infty) \end{cases} \quad (4-7)$$

のように表される。 $D_i, D_j$ の相関係数が $\rho_{ij}$ であるとすると、

$$\rho_{ij} = \frac{E[D_i D_j] - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}} \quad (4-8)$$

という関係が成立する。また、 $X_i, X_j$ の相関係数を $\tilde{\rho}_{ij}$ とすると、 $\rho_{ij}$ と $\tilde{\rho}_{ij}$ の間には $E[D_i D_j]$ を介して

$$E[D_i D_j] = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_i)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_j)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}_{ij}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}_{ij}^2)}\{x_i^2 + x_j^2 - 2\tilde{\rho}_{ij}x_i x_j\}\right) dx_i dx_j \quad (4-9)$$

という関係が成立する。これをもとに $\tilde{\rho}_{ij}$ を全ての $i \neq j$ について求めることにより、標準正規確率変数 $X_1, \dots, X_n$ の相関行列が与えられ、 $D_1, \dots, D_n$ が得られる。

## (2) デフォルト事象の相関

デフォルト事象の相関係数の計算方法には、主に企業の資産価値モデルを用いる手法と社債のデフォルトデータを用いる手法がある。それらの手法の詳細は補論で詳述するが、以下では、後者の手法を実際のデフォルトデータに適用することによって、デフォルト事象の相関係数の水準を確認することとする。

使用するデータは、Moody's社が公表している格付毎の債券のヒストリカルなデフォルト・データ(Keenan, Shtogrin and Sobehart[1999])である。

1970年～1998年のデフォルト率のデータを用いて、各格付毎のデフォルト率

の平均  $p$  と分散  $\sigma^2$  を求めた上で、サンプル数が十分大きいとの仮定の下、同一格付内の平均的なデフォルト相関  $\bar{\rho}$  を近似的に求めると【図表 7】のようになる。

【図表 7】各格付に対する年別デフォルト率と同一格付内相関  $\bar{\rho}$

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
1970年	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%	4.12%	23.38%
1971年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.42%	4.00%
1972年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.41%
1973年	0.00%	0.00%	0.00%	0.45%	0.00%	3.92%
1974年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	10.34%
1975年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.02%	6.15%
1976年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.01%	0.00%
1977年	0.00%	0.00%	0.00%	0.27%	0.52%	3.39%
1978年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.08%	5.56%
1979年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.49%	0.00%
1980年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	5.06%
1981年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.60%
1982年	0.00%	0.00%	0.26%	0.30%	2.73%	2.41%
1983年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.91%	6.36%
1984年	0.00%	0.00%	0.00%	0.36%	0.83%	6.78%
1985年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.75%	8.28%
1986年	0.00%	0.00%	0.00%	1.33%	2.05%	11.80%
1987年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.72%	5.86%
1988年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.24%	6.02%
1989年	0.00%	0.61%	0.00%	0.60%	2.98%	9.17%
1990年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.32%	16.11%
1991年	0.00%	0.00%	0.00%	0.28%	5.25%	14.66%
1992年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.30%	9.00%
1993年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.55%	5.76%
1994年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.23%	3.81%
1995年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.67%	4.84%
1996年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.45%
1997年	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.19%	2.10%
1998年	0.00%	0.00%	0.00%	0.12%	0.61%	4.08%
$p$	0.00%	0.02%	0.01%	0.14%	1.21%	6.63%
$\sigma^2$	0	1.28E-06	2.33E-07	8.01E-06	1.88E-04	2.49E-03
$\bar{\rho}$		0.0061	0.0026	0.0058	0.0158	0.0402

【図表 7】より、A 格以上では殆どの年でデフォルト率が 0.00% であるため、算出されたデフォルト相関  $\bar{\rho}$  の水準に関する信頼度は高くない。したがって、ここでは Baa 格以下についてみると、Baa（平均デフォルト率 0.14%）でデフォルト相関は 0.006、Ba（平均デフォルト率 1.21%）でデフォルト相関は 0.016、B（平均デフォルト率 6.63%）でデフォルト相関は 0.040 となっており、格付が低いほど、すなわちデフォルト率が高いほど、デフォルト事象の相関係数が高くなることわかる。

一方、Baa 格以下において、異なる格付  $k$  と  $l$  との間の平均的なデフォルト相

関  $\bar{\rho}_{kl}$  を算出すると以下ようになる。サンプル数が少ないため確たる結論を導き出すことは困難であるが、格付が低くなるとデフォルト相関が大きくなる傾向があることがわかる。

$$\bar{\rho}_{Baa Ba} = 0.0031$$

$$\bar{\rho}_{Baa B} = 0.0043$$

$$\bar{\rho}_{Ba B} = 0.0166$$

### ( 3 ) サンプル・ポートフォリオ<sup>16</sup>の説明

#### A . 内部格付

本稿では、信用度に応じた7段階の格付を仮定した。各々の格付はデフォルト率（1年のデフォルト率と仮定）によって分類される。さらに、同一格付のサブポートフォリオ内の全てのエクスポージャーが同一のデフォルト率を有する、すなわち、デフォルト率は離散的であると仮定した（【図表8】）。

【図表8】各格付のデフォルト率

格付	1	2	3	4	5	6	7
デフォルト率	0.1%	0.5%	1.0%	2.0%	5.0%	10.0%	20.0%

#### B . デフォルト事象の相関係数

サブポートフォリオ内のデフォルト事象の相関係数は、下表のように仮定した（【図表9】）。これは（2）で示した、デフォルト率が高くなるとデフォルト相関も概ね高くなる、という事実を反映させたものである。

【図表9】各格付のデフォルト事象の相関係数

格付	1	2	3	4	5	6	7
デフォルト相関	0.001	0.005	0.010	0.010	0.015	0.017	0.020

#### C . 各格付のサブポートフォリオ

各格付のサブポートフォリオに含まれるエクスポージャーの総額は1,000億円とした。サブポートフォリオ内のエクスポージャー数は、a. 100、b. 500、c. 1,000

<sup>16</sup> 本稿では、同一格付のエクスポージャーから構成されるポートフォリオを「サブポートフォリオ」と呼び、異なる格付のサブポートフォリオの集合を「サンプル・ポートフォリオ」と呼ぶ。

の3通りとし、金額の分布は、均一分布、一先に集中、10%の先に集中、指数分布、3段階、5段階、の6通りを設定した（詳細は【図表10】を参照。合計18通りの組み合わせで、1a~6cの通し番号を付した）。

【図表10】各サブポートフォリオ内のエクスポージャーの分布等  
括弧内は Concentration factor 値

	a. 100 先	b. 500 先	c. 1000 先
均一分布	1a: 各 10 億円 (CF=0.100)	1b: 各 2 億円 (CF=0.045)	1c: 各 1 億円 (CF=0.032)
1 先に与信集中 (他の 100 倍)	2a: 1 先に 502.51 億円、99 先に各 5.02 億円 (CF=0.505)	2b: 1 先に 166.94 億円、499 先に各 1.66 億円 (CF=0.171)	2c: 1 先に 90.99 億円、999 先に各 0.90 億円 (CF=0.095)
10%の先に与信集中 (他の 100 倍)	3a: 10 先に各 91.74 億円、90 先に各 0.92 億円 (CF=0.290)	3b: 50 先に各 18.35 億円、450 先に各 0.18 億円 (CF=0.130)	3c: 100 先に各 9.17 億円、900 先に各 0.09 億円 (CF=0.092)
指数分布	4a: 平均 10 億円の指数分布に従う (CF=0.142)	4b: 平均 2 億円の指数分布に従う (CF=0.065)	4c: 平均 1 億円の指数分布に従う (CF=0.046)
3 段階分布 金額は 2 段階目で 2 倍、3 段階目で 10 倍	5a: 50 先に各 2.85 億円、40 先に各 14.29 億円、10 先に各 28.57 億円 (CF=0.129)	5b: 250 先に各 0.57 億円、200 先に各 2.86 億円、50 先に各 5.71 億円 (CF=0.058)	5c: 500 先に各 0.29 億円、400 先に各 1.43 億円、100 先に各 2.86 億円 (CF=0.041)
5 段階分布 各段階毎に金額は 1.5 倍	6a: 3.79 億円、5.69 億円、8.53 億円、12.80 億円、19.19 億円、をそれぞれ各 20 先に配分 (CF=0.114)	6b: 0.76 億円、1.14 億円、1.71 億円、2.56 億円、3.84 億円、をそれぞれ各 100 先に配分 (CF=0.051)	6c: 0.38 億円、0.57 億円、0.85 億円、1.28 億円、1.92 億円、をそれぞれ各 200 先に配分 (CF=0.036)

なお、この分布は、相対的にかなり集中が進んでいるポートフォリオである。このようなポートフォリオについては、前章で述べたような最大損失額の近似の精度がそれ程高くないことが予想され、その点を確認するために設定したものである。

また、計 18 通りのサブポートフォリオについて Concentration factor (CF) の値を掲げたが、この数字から、最も分散しているポートフォリオは 1c であり、最も集中しているサブポートフォリオは 2a であることが確認できる。

#### D. サンプル・ポートフォリオ

サンプル・ポートフォリオについては、C. の格付毎のサブポートフォリオを組み合わせることにより、12 種類を設定した。具体的には、各サンプル・ポートフォリオは、分布型・エクスポージャー数が同一の（各格付の）サブポートフォリオからなるものとした。それらのサンプル・ポートフォリオには、1A～6A（総エクスポージャー数 700）、1B～6B（同 3,500）との通し番号を付けた（【図表 11】参照）。

【図表 11】 サンプル・ポートフォリオ

格付 ポートフォリオ	1	2	3	4	5	6	7	総エクスポージャー数	合計金額 (億円)
1A	1a	1a	1a	1a	1a	1a	1a	700	7,000
2A	2a	2a	2a	2a	2a	2a	2a	700	7,000
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
5B	5b	5b	5b	5b	5b	5b	5b	3,500	7,000
6B	6b	6b	6b	6b	6b	6b	6b	3,500	7,000

なお、エクスポージャー  $i, j (i \neq j)$  間のデフォルト事象の相関は、 $i$  の属する格付  $k$  と、 $j$  の属する格付  $l$  の組み合わせのみに依存するものとした。同一格付内のエクスポージャー間の相関は、【図表 9】の値を使用し、異なる格付を持つエクスポージャー間の相関は、この水準を参考にして、次のように定めた（【図表 12】）。

すなわち、非対角成分  $\rho_{kl} (k > l)$  については、対角成分を使ってデフォルト事象の共分散を  $\sigma_{kk} = \rho_{kk} p_k (1 - p_k)$  のように求め、非対角要素に対応する共分散を  $\sigma_{kl} = \min(\sigma_{kk}, \sigma_{ll})$  と定め<sup>17</sup>、 $\sigma_{kl} = \rho_{kl} \sqrt{p_k (1 - p_k)} \sqrt{p_l (1 - p_l)}$  の関係を利用した。

<sup>17</sup> ここでは、求めた分散・共分散行列がコレスキー分解できるように、互いに異なる格付  $(k, l)$  の共分散  $\sigma_{kl}$  が、それら 2 つの格付  $(k, l)$  各々の共分散  $\sigma_{kk}, \sigma_{ll}$  の水準を上回らないという条件を課した。実際には、この条件が成立しない場合がある可能性はあるが、サンプル・ポートフォリオの UL の計算を例示することを目的としているので、本稿ではこの点には立ち入らず、上記のように分散・共分散行列がコレスキー分解できるとの前提で議論を進める。

【図表 12】格付の各組合わせに対応する相関係数

格付	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0010						
2	0.0004	0.0050					
3	0.0003	0.0035	0.0100				
4	0.0002	0.0025	0.0071	0.0100			
5	0.0001	0.0016	0.0046	0.0064	0.0150		
6	0.0001	0.0012	0.0033	0.0047	0.0109	0.0170	
7	0.0001	0.0009	0.0025	0.0035	0.0082	0.0127	0.0200

#### (4) シミュレーション手法の詳細

以上の設定によるサブポートフォリオ及びそれらを組合わせたサンプル・ポートフォリオについて、本稿では  $N = 10$  万回のモンテカルロ・シミュレーションで UL を算出する。ここでは、シミュレーションの具体的手法の詳細を述べる。

##### A. サポートフォリオでのシミュレーション

サブポートフォリオ（格付  $k$ ）のエクスポージャー数を  $n$ 、デフォルト率を  $p_k$ 、デフォルト事象の相関係数を  $\rho_{kk}$  とする。このサブポートフォリオの UL をモンテカルロ・シミュレーションで算出するには、相関を持った  $n$  変量ベルヌーイ乱数のセット  $d^1 = (d_1^1, \dots, d_n^1), d^2 = (d_1^2, \dots, d_n^2), \dots, d^N = (d_1^N, \dots, d_n^N)$  が必要である。この乱数のセットを得る方法は (1) A. で述べた。

このサブポートフォリオに含まれる  $n$  個のエクスポージャー額をそれぞれ  $v_{k,1}, \dots, v_{k,n}$ （億円）とすると、1 回目の試行  $d^1$  に対応する損失額  $l^1$ （億円）は、 $l^1 = \sum_{i=1}^n d_i^1 v_{k,i}$  のように求められる。2 回目以降の試行についても同様にして、 $l^2, \dots, l^N$  を求め、 $l^1, \dots, l^N$  の経験分布（ヒストグラム）を描く。この経験分布を、真の損失額分布とみなしたうえで、各パーセント点を算出しこれを UL とした。

##### B. サンプル・ポートフォリオでのシミュレーション

(3) D. で述べた 7 段階の格付を含むサンプル・ポートフォリオの損失額の計算においてサブポートフォリオと大きく異なるのは、デフォルト率やデフォルト事象の相関が一定でないことである。デフォルト率やデフォルト事象の相関が一定でない場合の多変量ベルヌーイ乱数の発生方法については (1) B. で述べた。それ以降 UL 算出までの手順は、サブポートフォリオの場合と同様である。

## 4 - 2 シミュレーション結果及び考察

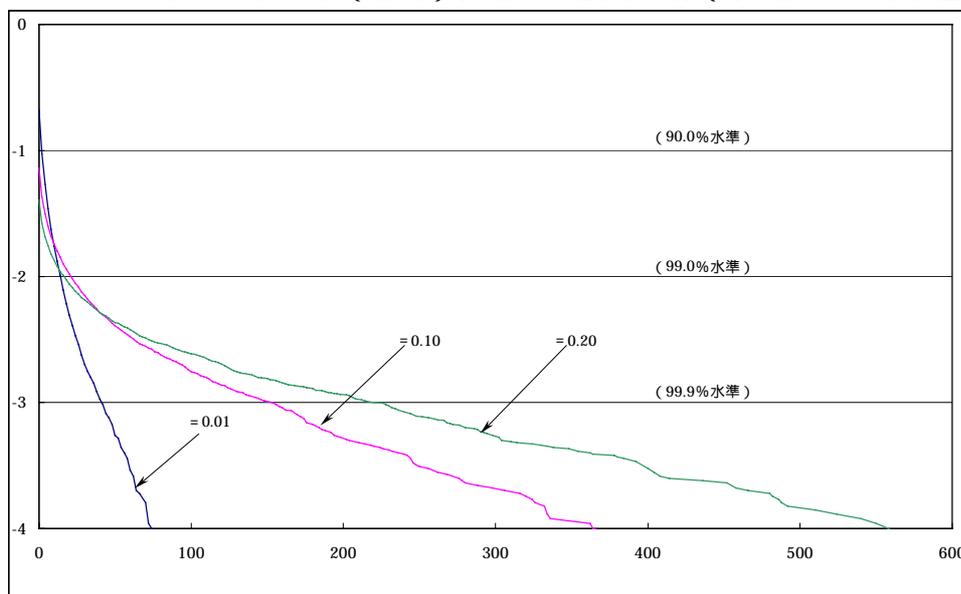
### ( 1 ) サポートフォリオ毎のシミュレーション

前節で示した手法に従い、各サポートフォリオについて UL を求めた。市場リスクの VaR を算出する場合には、UL として損失額の 99% 点を用いられることが多いが、ここでは、10 万回計算した結果得られた損失額分布の 99% 点と 99.9% 点の両方を算出した。なお、以下では UL = 最大損失額とする。

【図表 13】の例は、デフォルト率 0.1% の均一ポートフォリオ ( エクスポージャー数 500、合計金額 1,000 億円 ) について、 $\rho = 0.01$ 、0.10、0.20 の 3 通りを設定し、その損失額分布をプロットしたものである。各水準線との交点が、その水準での損失額を表している。これを見ると、99% 点では、 $\rho$  の水準による差は小さくなく、また  $\rho = 0.20$  の場合よりも損失額が小さくなると考えられる  $\rho = 0.10$  の場合の方が僅かに損失が大きくなっている。つまり、99% 点では、サポートフォリオのリスクを的確には捉え切れていないことになる。一方 99.9% 点では、そのような問題は発生していないことがわかる。実際の分析における  $\rho$  等のパラメータ設定では、【図表 13】に見られるようなケースは発生しなかったが、念のため 99.0% 点、99.9% 点の両方を算出した。

【図表 13】 損失額分布 ( 与信先数 500、デフォルト率 0.1% )

横軸：損失額 ( 億円 )、縦軸：観測頻度 ( 累積、常用対数値 )

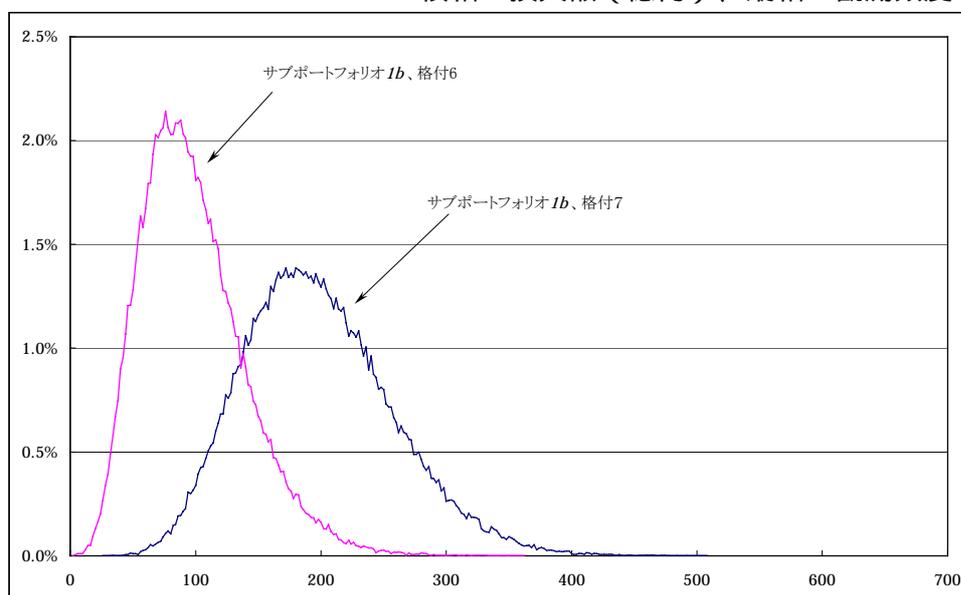


次に、サポートフォリオについて、シミュレーションの結果を基に、損失額の確率密度分布の具体例を【図表 14】に示す。ここでは、サポートフォリオは 1b (均一ポート、500 先) とし、格付は 6 と 7 の場合について例示した。ここ

から分布の形状が左右非対称となっていること等が確認できる。

【図表 14】 損失額の確率密度分布の具体例

横軸：損失額（億円）、縦軸：観測頻度



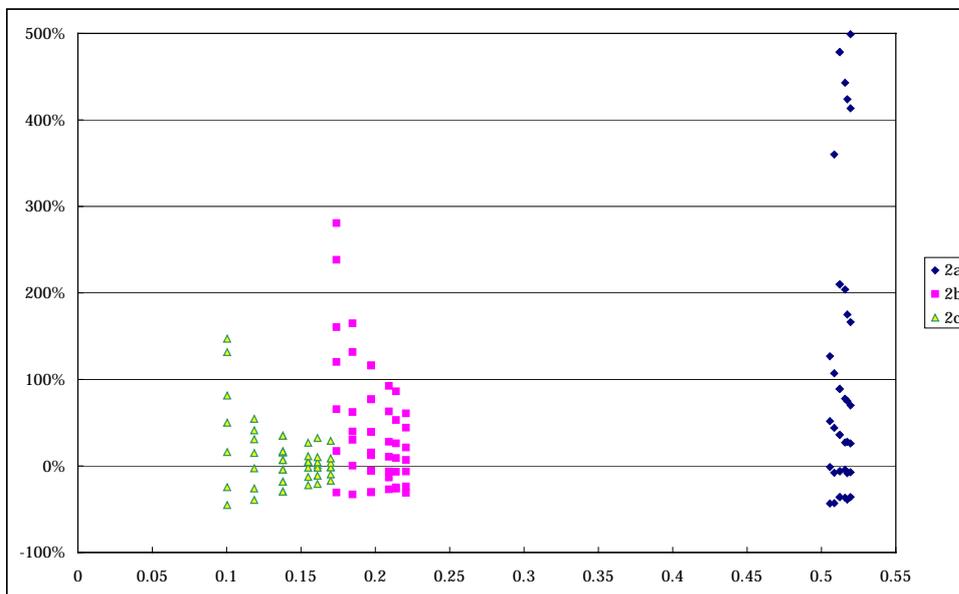
さて、2～6のサブポートフォリオ毎に、(3-9)式を用いて近似的に算出した UL とシミュレーションによって求めた UL との相対誤差を表した図が【図表 15】～【図表 19】である<sup>18、19</sup>。

<sup>18</sup> ここでの相対誤差は、シミュレーションで求めた 99% タイルの UL に対する近似値の誤差である。

<sup>19</sup> 各サブポートフォリオについて、上記のデフォルト率とデフォルト相関の全ての組合わせのデータ (49 個) がプロットされている (ただし、【図表 15】～【図表 19】では相対誤差が 500% 超となるデータは除いてある)。

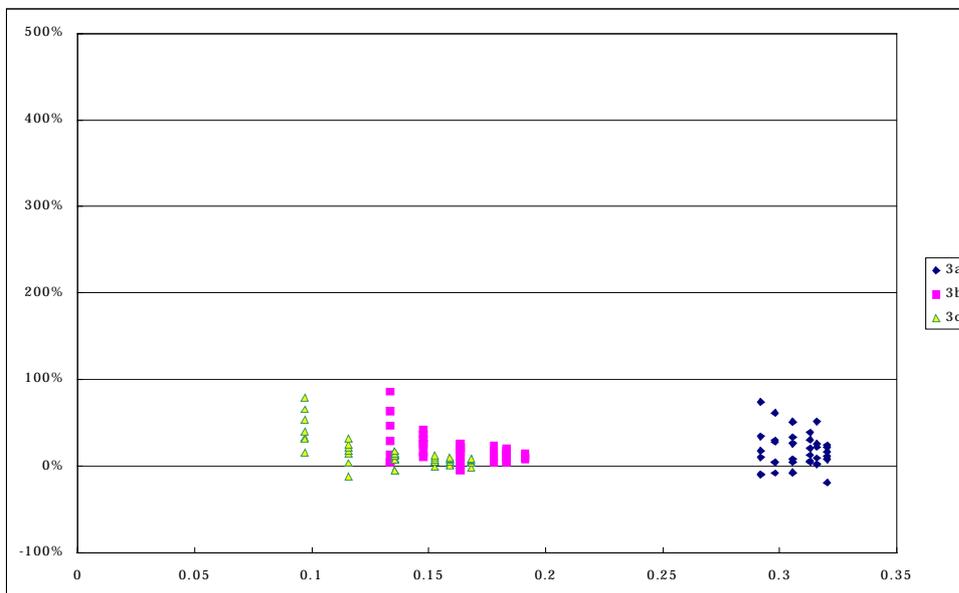
【図表 15】サブポートフォリオ 2 の拡張 CF と相対誤差

横軸：拡張 CF、縦軸：相対誤差



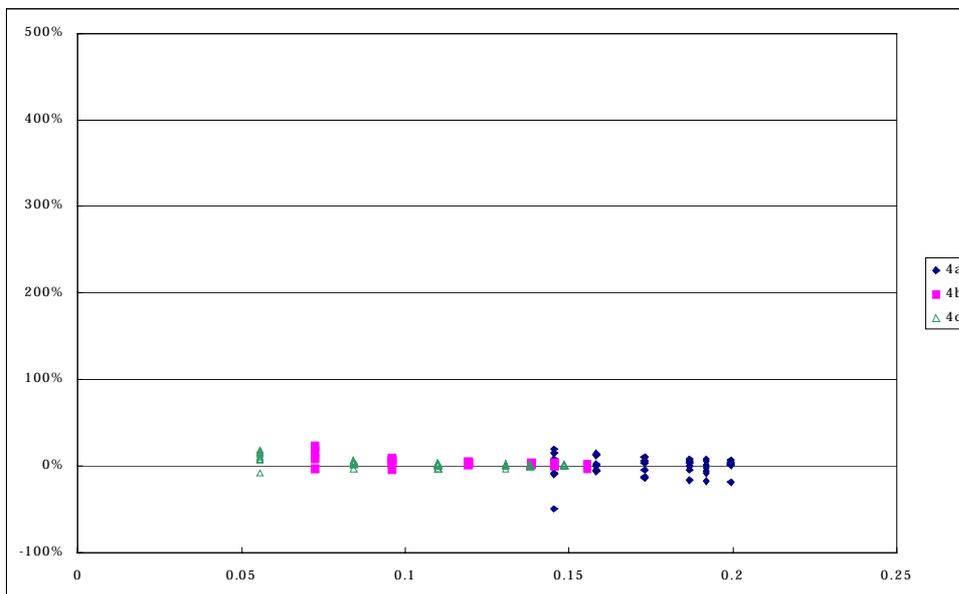
【図表 16】サブポートフォリオ 3 の拡張 CF と相対誤差

横軸：拡張 CF、縦軸：相対誤差



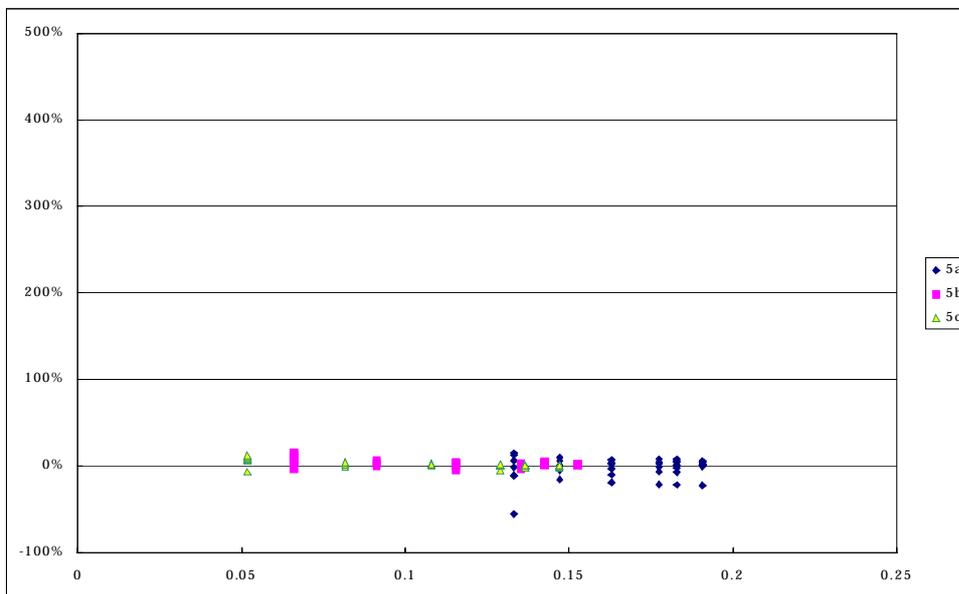
【図表 17】サブポートフォリオ 4 の拡張 CF と相対誤差

横軸：拡張 CF、縦軸：相対誤差



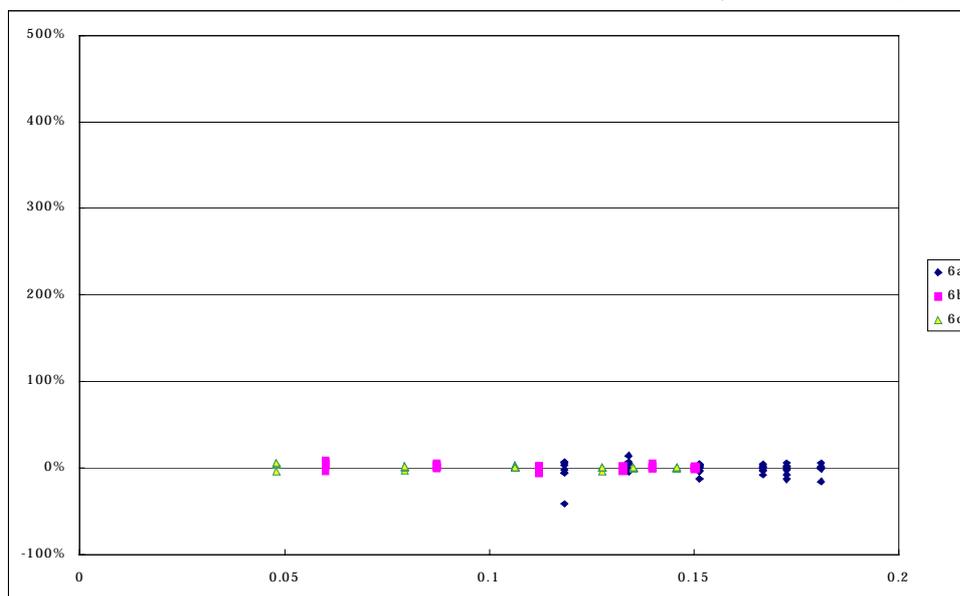
【図表 18】サブポートフォリオ 5 の拡張 CF と相対誤差

横軸：拡張 CF、縦軸：相対誤差



【図表 19】サブポートフォリオ 6 の拡張 CF と相対誤差

横軸：拡張 CF、縦軸：相対誤差



また、これら相対誤差の絶対値の平均及び最大値を、サブポートフォリオ毎に【図表 20】に示した。

【図表 20】相対誤差の絶対値平均と最大値（単位：％）

	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c
絶対値平均	230.53	53.74	24.42	128.13	18.31	14.73	8.34	4.50	3.34
最大値	860.01	280.43	147.00	1,218.43	86.29	78.90	49.41	23.53	18.53

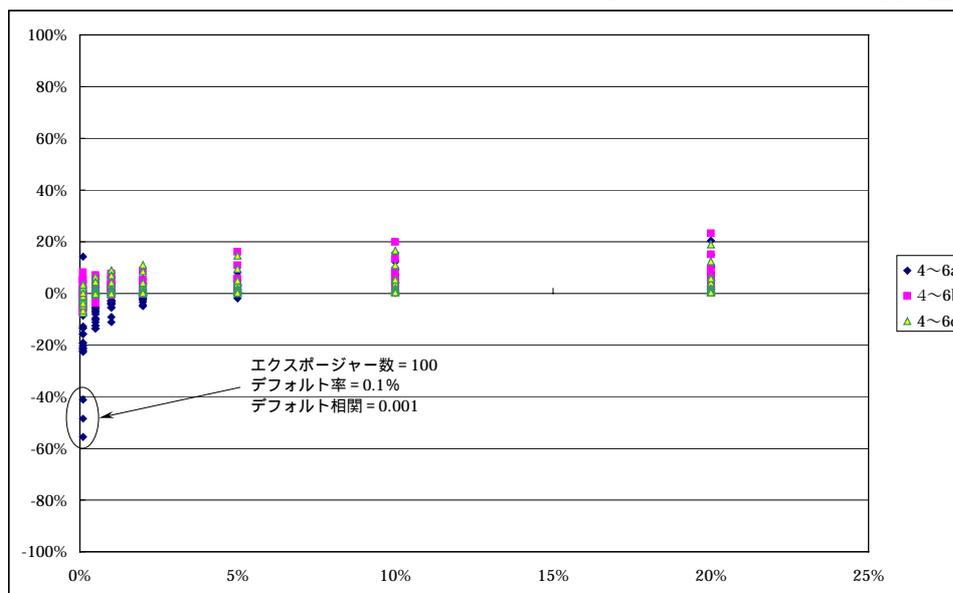
	5a	5b	5c	6a	6b	6c
絶対値平均	8.22	3.46	2.53	5.09	2.10	1.42
最大値	55.56	15.15	12.37	41.16	8.23	5.84

この結果からは、まず 1 先だけ大口エクスポージャーが存在する場合(サブポートフォリオ 2)及び 10%の先に与信が集中している場合(サブポートフォリオ 3)は、相対誤差が大きいことがわかる。これに対し、相対的にエクスポージャーが分散化されているサブポートフォリオ(4~6)では、相対誤差が絶対値平均で数%の範囲に収まっていることがわかる(網掛けを施してある部分)。実際の金融機関の与信ポートフォリオでは、サブポートフォリオ 2、3 のように極端に与信が集中しているようなケースは殆どないと考えられることから、(3-9)式によって UL を近似する手法が、今回のサブポートフォリオについてシミュレーションを行った範囲では、実務上ある程度はワークするとみられる。

なお、サブポートフォリオ 4a、5a、6a では、それぞれ 1 例ずつが、-40%超の比較的大きな相対誤差を示している。そこで、サブポートフォリオ 4a~6a、4b~6b、4c~6c について、デフォルト率と相対誤差の関係を【図表 21】に示した。

【図表 21】サブポートフォリオ 4~6 のデフォルト率と相対誤差

横軸：デフォルト率、縦軸：相対誤差



これを見ると、エクスポージャー数=100、デフォルト率=0.1%、デフォルト相関=0.001 の設定の場合に、上記の -40%超の最大の相対誤差が生じていることがわかる。

脚注15でも言及したように、現在のような景気低迷局面においては、金融機関の与信ポートフォリオで高い内部格付（すなわち、かなり低いデフォルト率）を付与されているようなエクスポージャーはそれ程多くはないと考えられる。このため、そのような高い内部格付のサブポートフォリオでは、ここで示したように、近似精度が十分に確保できない可能性はある。しかしながら、このようなサブポートフォリオの場合には、シミュレーションによって相対誤差の水準を計算した上で、その水準（上記の例では -40%超）を所与として調整を施して UL を見積もるといった手法も考えられる。

## (2) サンプル・ポートフォリオの UL の算出

サンプル・ポートフォリオ 1A~6A、1B~6B について、4 - 1 で述べた手法を

用いてシミュレーションを行い UL を算出した。また、サブポートフォリオ毎に UL を計算し、それらを単純に合計したものと比較のため【図表 22】に示した。

【図表 22】サンプル・ポートフォリオの UL

	99.0%UL (億円)			99.9%UL (億円)		
	全体 で計算	サブ ポート フォ リオ を合計	/	全体 で計算	サブ ポート フォ リオ を合計	/
1A	750.00	980.00	1.31	920.00	1,280.00	1.39
2A	1,296.48	2,417.09	1.86	1,788.95	3,537.69	1.98
3A	958.12	1,609.17	1.68	1,164.22	2,273.39	1.95
4A	779.12	1,117.85	1.43	946.62	1,489.89	1.57
5A	771.43	1,074.29	1.39	937.14	1,417.14	1.51
6A	760.66	1,026.07	1.35	918.72	1,352.37	1.47
1B	726.00	876.00	1.21	878.00	1,122.00	1.28
2B	828.05	1,288.82	1.56	1,028.38	1,764.61	1.72
3B	773.95	1,055.60	1.36	953.39	1,394.68	1.46
4B	732.84	905.23	1.24	893.02	1,163.86	1.30
5B	730.85	892.57	1.22	893.14	1,138.85	1.28
6B	729.57	882.94	1.21	887.77	1,126.49	1.27

サブポートフォリオ毎に UL を計算し、それらを単純に合計したものは、サンプル・ポートフォリオ全体で計算した UL よりも明らかに大きくなる。【図表 22】からは、本稿で用いたサンプル、デフォルト率、格付区分数等の条件では、前者は後者の 1.2 倍～2 倍程度になっている<sup>20</sup>ことがわかる。

### (3) ポートフォリオの UL の簡便な算出手法

サンプル・ポートフォリオ全体の UL を計算する場合、簡便な手法として、各サブポートフォリオの UL の単純合計を(2)で示した倍率で除することが考えられる。この倍率は、ポートフォリオの構成が大きく変化しない限りは、一定であると見なしても差し支えないと考えられる。実際の金融機関の与信ポートフォ

<sup>20</sup> 一般的には、格付区分数が多くなれば多くなるほど、サブポートフォリオ内のエクスポージャー分散効果が減殺されるため、この倍率は大きくなる。

リオの構成が短期間で大きく変動することはあまり想定できない<sup>21</sup>ことから、ある程度定期的にこの倍率をシミュレーションによって算出しておけば十分であると思われる。

一方、サブポートフォリオの UL については、上述したように、ポートフォリオの不均一さが変化したとしても、エクスポージャー個数  $n$  が不変である場合や  $n$  の増減が実務的に無視できると判断されるような場合には、エクスポージャー個数  $n$  の均一ポートフォリオの UL で代用して、サブポートフォリオの UL を近似的に算出することができる。

## 5 . おわりに

金融機関における与信ポートフォリオの信用リスク量の算出においては、一般的には、コンピュータによるシミュレーションが行われる。しかしながら、与信エクスポージャーの数が多くなると、シミュレーションに長時間を要してしまい、機動的な信用リスク量の算出が困難となることがある。

本稿では、そうしたシミュレーションの負担を極力抑制しつつ、ある程度簡便に与信ポートフォリオの信用リスク量を近似する手法を提示した。この手法のポイントは、ポートフォリオのエクスポージャー数及び金額を一定とすると、損失額の標準偏差は各エクスポージャーの金額が同一の均一ポートフォリオの場合に最小となること、ポートフォリオの不均一さは Concentration factor(CF) ないしデフォルト相関係数の調整を加えた拡張 CF で定義できること、に着目した上で、不均一ポートフォリオの任意の信頼区間(例えば 99%タイル)の損失額、すなわち信用リスク量は、(エクスポージャー数と金額が同一の)均一ポートフォリオの同損失額に 2 つのポートフォリオの拡張 CF の比を乗じることで近似できると仮定したことである。

本稿の目的は、この仮定が実務上使用できる範囲で成立し得るのかを、仮想的に設定した数種類のポートフォリオにおいてシミュレーションを行うことによって確認することであった。今回のシミュレーション結果からは、大口エクスポージャーが存在しポートフォリオの集中度が相当高くなっているような場合を除いて、拡張 CF を使った簡便的手法でポートフォリオの信用リスク量がある程度の精度(本稿の結果では平均 10%未満の相対誤差)で近似できること、すなわち上記の仮定が概ね実務上使用できると思われる範囲で成立することが確

---

<sup>21</sup> 邦銀の場合、現状、与信額の増減率は非常に低い水準となっている。

認できた。勿論、時間をかけてシミュレーションを行うことによって信用リスク量を算出する場合に比べれば、この近似手法にはより大きな誤差が内包されていることは言うまでもないが、トレーディング・ポートフォリオと異なり与信ポートフォリオの構成はそれ程急激には変動しないことを考えると、こうした近似手法をシミュレーションと併用することには一定の有用性があると考えられる。

以 上

(補論1) 均一ポートフォリオの最大損失額の解析的な算出方法

A. 最大損失額の解析的な算出方法

均一ポートフォリオでは、1先当たりのエクスポージャー額が等しいため、定められた確率（例えば、99%、99.9%）で何先までデフォルトするかにより最大損失額を求めることができる。すなわち、 $N$ 先のうち $n$ 先デフォルトする確率を $P_n^N$ とすると、99%最大損失額を求める場合、 $\sum_{n=0}^m P_n^N \geq 0.99$ となる最小の $m$ を求めれば、1先当たりのエクスポージャー額 $v$ と掛け合わせた $mv$ が99%最大損失額となる。

そこで、 $N$ 先のうち $n$ 先デフォルトする確率 $P_n^N$ を求めることを考える。1先当たりのデフォルト確率を $p$ とする。相関の与え方は4-1(1)A.で示したとおりであり、 $\Phi(\cdot)$ を標準正規分布の累積密度関数として、 $\alpha = \Phi^{-1}(p)$ と置くと、 $P_n^N$ は正規分布を介して(1)式のように表現できる。

$$P_n^N = \Pr\{X_1 \leq \alpha, \dots, X_n \leq \alpha, \alpha < X_{n+1}, \dots, \alpha < X_N\} {}_N C_n \quad (1)$$

ただし、 $X_i \sim N(0,1)$ ,  $Cor(X_i, X_j) = \tilde{\rho}$  ( $i \neq j$ )

ここで、 ${}_N C_n$ は $N$ 個のうち $n$ 個を選ぶ組合せの数である。確率変数 $X_i$ には(1)式のように相関があり互いに独立ではないが、これは互いに独立な確率変数 $U, V_i$ を使って、

$$X_i = \sqrt{\tilde{\rho}} U + \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_i, \quad U, V_i \sim N(0,1) \text{ i.i.d.} \quad (2)$$

と書き直すことができる。(1)式と(2)式を用いると $P_n^N$ は、

$$\begin{aligned} P_n^N &= \Pr\{\sqrt{1-\tilde{\rho}} V_1 \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U, \dots, \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_n \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U, \\ &\quad \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_{n+1}, \dots, \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_N\} {}_N C_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{\sqrt{1-\tilde{\rho}} V_1 \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u, \dots, \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_n \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u, \\ &\quad \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_{n+1}, \dots, \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_N\} \phi(u) du {}_N C_n \end{aligned} \quad (3)$$

と変形できる。ただし、 $\phi(u)$ は標準正規分布の確率密度関数で、

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (4)$$

である。(3)式はさらに変形して、

$$\begin{aligned}
P_n^N &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{\sqrt{1-\tilde{\rho}} V_1 \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u\} \cdots \Pr\{\sqrt{1-\tilde{\rho}} V_n \leq \alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u\} \\
&\quad \Pr\{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_{n+1}\} \cdots \Pr\{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} U < \sqrt{1-\tilde{\rho}} V_N\} \\
&\quad \phi(u) du_N C_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right) \cdots \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right] \cdots \\
&\quad \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right] \phi(u) du_N C_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right\}^n \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right]^{N-n} \phi(u) du_N C_n
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。この変形には $V_i$ が互いに独立であることを使った。

纏めると、99%最大損失額を求める場合、

$$\sum_{n=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right\}^n \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \sqrt{\tilde{\rho}} u}{\sqrt{1-\tilde{\rho}}}\right)\right]^{N-n} \phi(u) du_N C_n \geq 0.99 \tag{6}$$

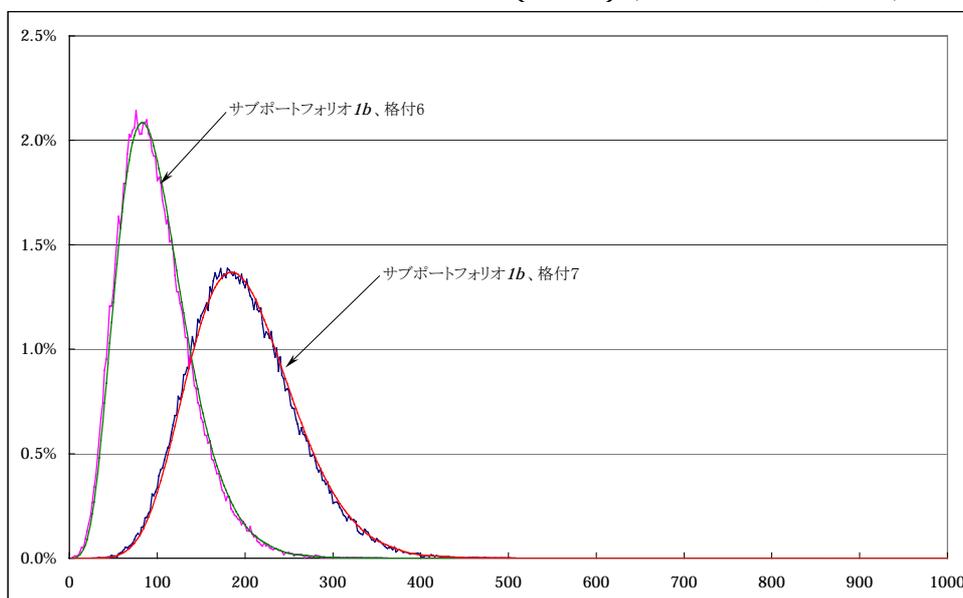
となる最小の $m$ を求め、1先当たりのエクスポージャー額 $v$ と掛け合わせた $mv$ が99%最大損失額となる。

## B . 損失額分布のシミュレーション結果との比較

A . での考え方をを用いると、 $n$ 先デフォルトする、すなわち、損失額が $nv$ である確率は $P_n^N$ となるため、損失額分布についても解析的に求めることができる。そこで、【図表 14】で示した損失額の確率密度分布のシミュレーション結果に対して、同一のサブポートフォリオについて上記の解析的な手法で求めた結果を重ね合わせてみると、【図表 A】のようになる。【図表 A】において、滑らかな2本の曲線が解析的な手法による計算結果であり、ギザギザな2本の曲線がシミュレーションによる計算結果である。

【図表 A】 損失額の確率密度分布（シミュレーションと解析的な手法との比較）

横軸：損失額（億円）、縦軸：観測頻度、確率



【図表 A】をみると、シミュレーションによる計算結果も解析的な手法による計算結果もほとんど変わらないことがわかる。

99%最大損失額について、解析的な手法による結果とシミュレーションによる結果を比較した表が【図表 B】である。

【図表 B】 解析的な手法での 99%UL とシミュレーションによる 99%UL との差

単位：億円

サブポートフォリオ 1b の格付	差（解析的手法-シミュレーション）
1	0.00
2	0.00
3	0.00
4	0.00
5	0.00
6	0.00
7	2.00

【図表 B】より、99%最大損失額については、両者の結果に殆ど差異がないことがわかる。

## (補論2) デフォルト事象の相関係数の算出手法

### A. 企業の資産価値モデルを用いる手法

Merton[1974]の考え方に従って、企業の資産価値がある水準以下に低下した場合に、デフォルトが発生すると考える。つまり、企業の資産価値にデフォルトと非デフォルトの境界となる閾値が存在するとする。

その上で、企業の資産価値の収益率が、標準正規分布に従うと仮定してモデル化を行う。つまり、企業*i*のデフォルト率を  $p_i$  とすると、デフォルト・非デフォルトの閾値は、 $\Phi^{-1}(\cdot)$  を標準正規分布の累積密度関数の逆関数として、 $\Phi^{-1}(p_i)$  で与えられる。これを用いれば、企業*i*と企業*j*の同時デフォルト率  $p_{ij}$  は、

$$p_{ij} = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_i)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p_j)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\{x_i^2 + x_j^2 - 2rx_ix_j\}\right) dx_i dx_j \quad (7)$$

ただし、 $r$  は企業*i, j*の資産収益率<sup>22</sup>の相関係数

で与えられる。

これによって、企業*i*と企業*j*のデフォルト事象の相関係数  $\rho_{ij}^D$  は(8)式により求められる<sup>23</sup>。

$$\rho_{ij}^D = \frac{p_{ij} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}} \quad (8)$$

### B. 債券のデフォルト・データ用いる手法

債券のデフォルト・データを用いて、計算を行う方法を解説する。例えば格付機関が公表している格付毎の債券のデフォルト・データに対してこの手法を適用することによって、同一格付内または異なる格付間の平均的なデフォルト事象の相関の水準を求めることが出来る。

#### 同一格付内の相関<sup>24</sup>

まず、同一のデフォルト率(同じ格付)を持つ  $N$  企業を考える。 $D_i$  を企業*i*がデフォルトしたときに1、デフォルトしなかった場合に0をとる確率変数とする。

<sup>22</sup> CreditMetrics では、企業の株価収益率を資産収益率の代理変数(proxy)として使用し、その相関係数の計算を行う枠組みを採用している。

<sup>23</sup> Zhou[1997]は、この手法を拡張し、first-passage-time モデルを用いたデフォルト事象の相関係数の算出方法を提示した。

<sup>24</sup> 本項目については、JP Morgan & Co. [1997]の Appendix F を参考にした。

また、平均デフォルト率を  $p$ 、デフォルトの標準偏差を  $\sigma$  とする。このとき、次のような関係がある。

$$D_i = \begin{cases} 1 & (i: \text{default}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_i \quad (10)$$

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)} \quad (11)$$

$S$  をデフォルト総数、すなわち、 $S = \sum_{i=1}^N D_i$  とすると、 $S$  の分散は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \sigma^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} p(1-p) \\ &= p(1-p) \left[ N + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \rho_{ij} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、企業間のデフォルト相関を  $\rho_{ij}$  とし、 $\rho_{ii} = 1$ 、 $\rho_{ji} = \rho_{ij}$  という関係を用いた。企業間のデフォルト相関  $\rho_{ij}$  ではなく、平均的なデフォルト相関  $\bar{\rho}$  を考えると、 $\bar{\rho}$  は次のように定義できる。

$$\bar{\rho} = \frac{2 \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \rho_{ij}}{N(N-1)} \quad (13)$$

これを用いて  $S$  の分散を表すと、

$$\text{Var}(S) = p(1-p) [N + N(N-1)\bar{\rho}] \quad (14)$$

となる。一方、デフォルトのボラティリティ  $\sigma$  は、 $\sigma^2 = \text{Var}(S/N)$  という関係にあることから、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\text{Var}(S)}{N^2} \\ &= p(1-p) \frac{1+(N-1)\bar{\rho}}{N} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。これを変形することで、平均的なデフォルト相関  $\bar{\rho}$  が

$$\bar{\rho} = \frac{\frac{N\sigma^2}{p(1-p)} - 1}{N-1} \quad (16)$$

と表されることがわかる。

$N$  が十分大きいときには、(16)式は次のように近似できる。

$$\bar{\rho} \cong \frac{\sigma^2}{p(1-p)} \quad (17)$$

### 異なる格付間の相関

同様に、異なる格付  $k$  と  $l$  に対して、 $D_{k,i}$ 、 $D_{l,j}$  をそれぞれ企業  $i$ 、企業  $j$  がデフォルトしたときに 1、デフォルトしなかった場合に 0 をとる確率変数とする。格付  $k$  と  $l$  に対し、それぞれ  $N$  企業、 $M$  企業あるとする。ここで、デフォルト総数  $S_k$ 、 $S_l$ 、平均デフォルト率  $p_k$ 、 $p_l$  を次のように定義する。

$$S_k = \sum_{i=1}^N D_{k,i}, \quad S_l = \sum_{j=1}^M D_{l,j} \quad (18)$$

$$p_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{k,i}, \quad p_l = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M D_{l,j} \quad (19)$$

異なる格付  $k$  と  $l$  に対する平均的なデフォルト相関  $\bar{\rho}_{kl}$  を次のように定義する。

$$\bar{\rho}_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \rho_{ij}}{NM} \quad (20)$$

このとき、 $S_k$  と  $S_l$  の共分散は(14)式と同様に次のようになる。

$$\begin{aligned} Cov(S_k, S_l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \rho_{ij} \sqrt{p_k(1-p_k)} \sqrt{p_l(1-p_l)} \\ &= \sqrt{p_k(1-p_k)} \sqrt{p_l(1-p_l)} \bar{\rho}_{kl} NM \end{aligned} \quad (21)$$

一方、

$$\frac{Cov(S_k, S_l)}{NM} = Cov\left(\frac{S_k}{N}, \frac{S_l}{M}\right) = Cov(p_k, p_l) \quad (22)$$

となることから、格付間の平均的なデフォルト相関  $\bar{\rho}_{kl}$  は以下で表される。

$$\bar{\rho}_{kl} = \frac{Cov(p_k, p_l)}{\sqrt{p_k(1-p_k)} \sqrt{p_l(1-p_l)}} \quad (23)$$

(参考文献)

Basle Committee on Banking Supervision: “Credit Risk Modelling: Current Practice and Application”, April 1999

Credit Suisse Financial Products: “CreditRisk+”, 1997

J.P. Morgan & Co.: “CreditMetrics™ Technical Document”, April 1997

Keenan, S. C., I. Shtogrin and J. Sobehart: “Historical Default Rates of Corporate Bond Issues, 1920 – 98”, Moody’s Special Comment, March 1999

Merton, R.: “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, *Journal of Finance* 28, 1974

Treacy, W. F. and M. S. Carey: “Credit Risk Rating at Large U.S. Banks”, Federal Reserve Bulletin, November 1998

Zhou, C.: “Default Correlation: An Analytical Result”, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, May 1997

金融監督庁・FISC (財団法人金融システム情報センター): “リスク管理モデルに関する研究会報告書 付属文書 2: 信用リスク管理モデルの理論的分析(補論) ”、1999年7月