

コンピュータの金融実務での 具体的な活用方法の解説

とぎかひろのぶ よしほとしなお
戸坂凡展 / 吉羽要直

要 旨

金融実務では、周辺分布間の依存構造を扱う1つのツールとして、近年、多変量分布を周辺分布と分布間の依存構造に分離して表現した関数である「コピュラ (copula)」が注目されている。しかし、その一方で、実務でのコピュラの具体的な活用方法を解説した文献はほとんどない。そこで、本稿では、コピュラの具体的な活用方法の詳細を、実例を織り交ぜながら解説する。

本稿では、まず、コピュラの定義、性質に加えて、パラメータ推定方法と乱数発生方法を概説する。次に、正規、 t 、クレイトン、ガンベルおよびフランク・コピュラを対象に、それらの性質を説明し、具体的なパラメータ推定方法や乱数発生方法等を示す。また、コピュラを用いた実証分析を行い、若干の考察を加えるほか、コピュラを巡るいくつかの留意点を説明する。

キーワード：コピュラ、多変量分布、最尤法、乱数、相関、裾依存

本稿の作成に当たっては、小暮厚之教授（慶應義塾大学）から極めて有益なコメントを頂戴した。ここに記して感謝したい。ただし、本稿に示されている意見は日本銀行あるいは金融研究所の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

戸坂凡展 日本銀行金融研究所（現 金融機構局、E-mail: hironobu.tozaka@boj.or.jp）
吉羽要直 日本銀行金融研究所（E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

1 . はじめに

金融資産ポートフォリオの価格付けやリスク管理では、リスク・ファクターが多変量（確率）分布に従うとして評価を行う。ここで、重要になるのは、各変量の分布（周辺分布）と周辺分布間の依存構造の与え方である。一般に、株価時系列の収益率分布等、現実を観測される周辺分布は、正規分布と比べ厚い裾を持つ場合が多い。また、周辺分布間の依存度合いは、分布の場所（特に裾）によって異なる。例えば、市場に何らかのストレスが生じると、多くの株価等が同一方向に変動する場合があることが知られている。

金融実務では、周辺分布間の依存構造を扱う1つのツールとして、近年、多変量分布を各変量の周辺分布と分布間の依存構造とに分離して表現した関数である「コピュラ（copula）」が注目されている。コピュラが利用されている例としては、資産担保証券等の、信用リスクを有する多数の企業向け債権を原資産とする商品がある。このとき、原資産である各企業向け債権の信用度は互いに依存しているが、マクロ的な不況等の際には、それらの多くが一斉に悪化するような状況も想定される。このような原資産価格分布の裾における強い依存関係を、商品の価格付けやリスク評価に織り込むために、コピュラが活用されている。

このようにコピュラは金融実務で注目されているが、コピュラの具体的な活用方法を解説した文献はほとんどないのが実態である¹。そこで、本稿では、コピュラの具体的な活用方法の詳細を、実例を織り交ぜながら解説する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節では、コピュラの定義、性質に加え、パラメータ推定方法と乱数発生方法を概説する。3節、4節では、正規およびコピュラ、クレイトン、ガンベルおよびフランク・コピュラを対象に、それらの性質、具体的なパラメータ推定方法や乱数発生方法等を示す。5節では、コピュラを用いた実証分析を行い、若干の考察を加える。6節では、コピュラを巡るいくつかの留意点を説明する。最後に、7節でまとめを述べる。

2 . コピュラ

(1) コピュラの定義

n 種類のリスク・ファクターを想定し、それらを確率変数 X_1, \dots, X_n で表す。複数のリスク・ファクターの確率的変動を同時に捉えることは、確率変数 X_1, \dots, X_n の同時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ の挙動を表すことに等しい。周辺分布関数 F_1, \dots, F_n と、同

.....
¹ コピュラの理論の詳細は、例えばJoe [1997] やNelsen [1998] を参照。また、コピュラの金融データへの実務的応用を前提とした概説としては、Frees and Valdez [1998]、Bouyé *et al.* [2000]、Embrechts, Lindskog and McNeil [2003] 等がある（ただし、これらは、実務での具体的な活用手法を詳述してはいない）。

時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ の間には、次の関係がある。

スクラー (Sklar) の定理：

周辺分布関数 F_1, \dots, F_n を持つ連続な n 変量同時分布関数を F とすると、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (1)$$

を満たす関数 C が一意に存在する。

この C がコピュラと呼ばれる関数である²。つまり、コピュラ C に周辺分布関数 F_1, \dots, F_n を適用することで生成される $C(F_1, \dots, F_n)$ は、周辺分布を区間 $[0, 1]$ の一様分布とする同時分布関数である。これにより、連続な多変量分布関数は、リスク・ファクター単独の挙動を表現する周辺分布関数 F_1, \dots, F_n とそれらリスク・ファクター間の依存構造 (コピュラ C) に分解することができる。

さらに、この定理から次のことがわかる。 n 変量同時分布関数 F が、周辺分布関数 F_1, \dots, F_n とコピュラ C を持つとすれば、任意の $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (ただし、 $u_i \in [0, 1]$) で、(2) 式の関係を得る。

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)). \quad (2)$$

この C は、各周辺分布が区間 $[0, 1]$ の一様分布の同時分布関数となる。また、コピュラの密度関数として $c(u_1, \dots, u_n) = \partial^n C(u_1, \dots, u_n) / \partial u_1 \dots \partial u_n$ 、 X_i の確率密度関数を $f_i(x_i)$ 、同時分布関数 F の密度関数を f とすると、(1) 式から次式を得る。

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (3)$$

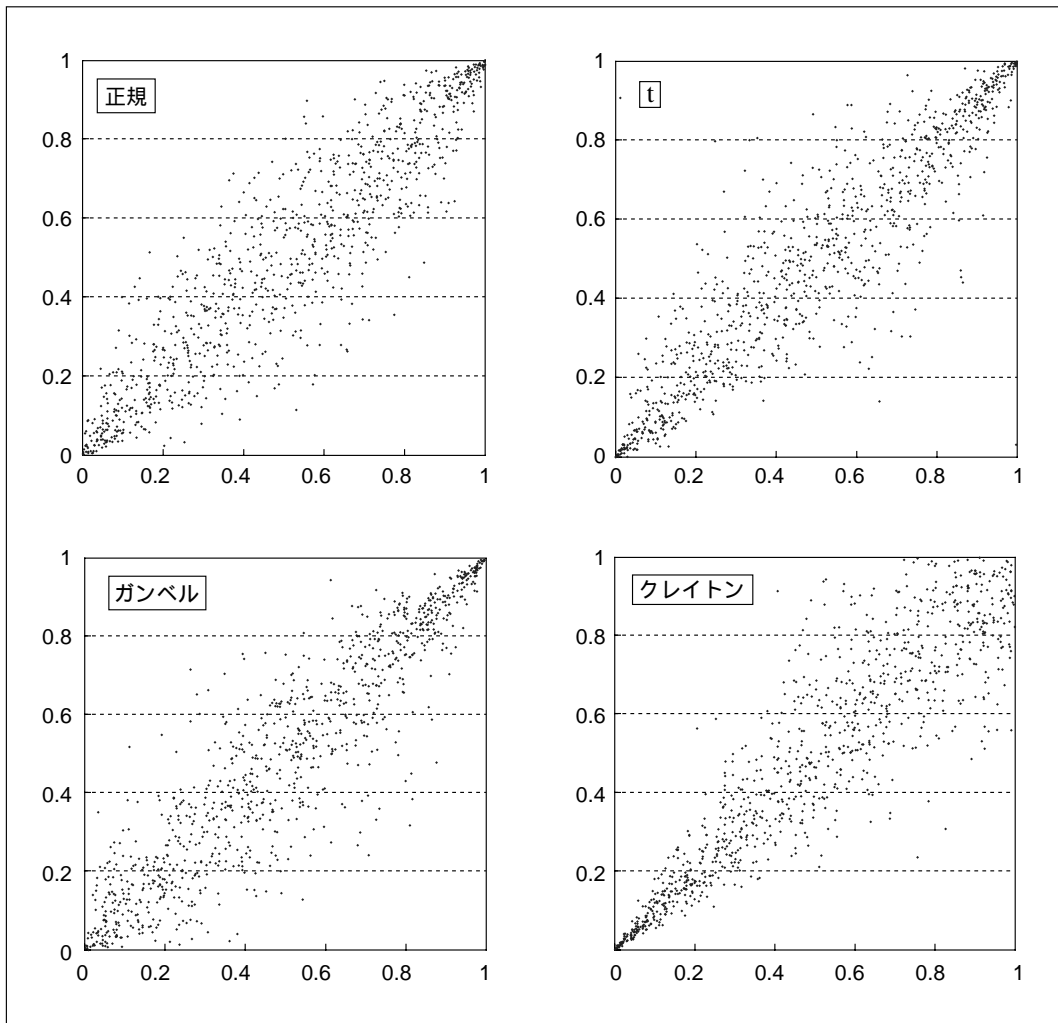
(2) コピュラの典型例とその特徴

以下では、コピュラ C の典型例をいくつか挙げて、その特徴を説明する。まず、変量間の相関構造を行列で表現するコピュラがある。そうしたコピュラの代表例としては、正規コピュラ、tコピュラが挙げられる。次に、変量間の相関構造を1種類のパラメータで表現するコピュラがある。この代表例としては、1パラメータ・アルキメディアン・コピュラがあり、それには、主な例として、クレイトン・コピュラ、ガンベル・コピュラ、フランク・コピュラが含まれる。

2 コピュラの数学的な定義や性質の詳細は、Nelsen [1998]、Bouyé *et al.* [2000] を参照。

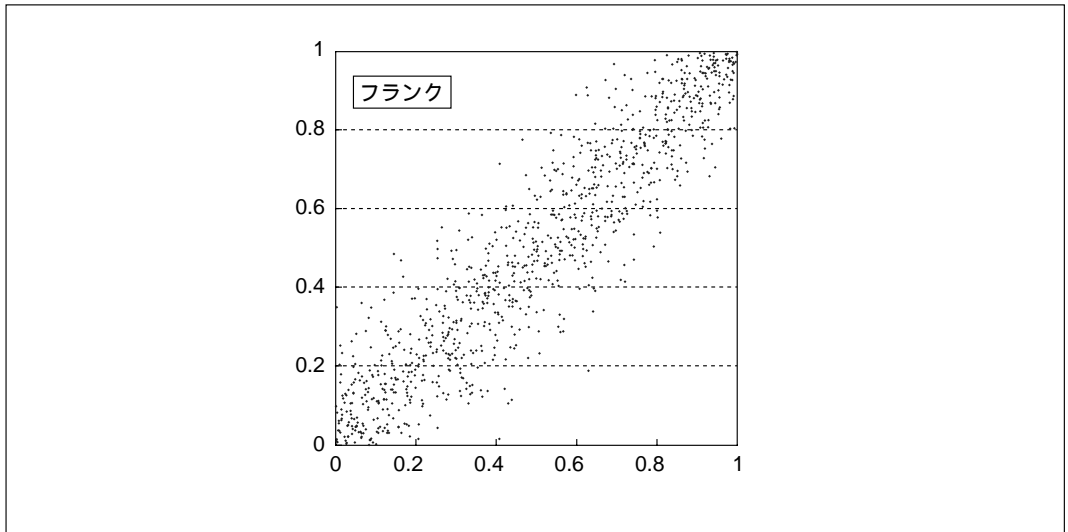
これら5つのコピュラ（正規、t、クレイトン、ガンベルおよびフランク）における、各変量間の依存関係の特徴を概観しよう。順位相関（詳細は後述する）が等しい2変量乱数 (u_1, u_2) を、5つの2変量コピュラを用いて1,000個発生させて、それらを2次元の散布図にしたものが図1である³。ここで、 $u_i \rightarrow 0$ と $u_i \rightarrow 1$ は周辺分布関数の両裾の極限に対応していることに注意してほしい。図1からは、コピュラによって、変量間の依存構造が異なっていることがわかる。

図1 各種2変量コピュラに従う乱数の散布図（横軸： u_1 、縦軸： u_2 ）



3 ここでは、全てのコピュラで、順位相関を表す「ケンドールのタウ」が0.75となるようにパラメータを設定した。具体的には、正規コピュラの相関係数を0.9239、tコピュラの相関係数を0.9239、自由度を3、クレイトン・コピュラの α を6、ガンベル・コピュラの γ を4、フランク・コピュラの δ を14.14とした（各コピュラとそのパラメータの詳細は後述する）。

図1 (続き)



まず、正規コピュラとtコピュラに注目してみよう。それらの (u_1, u_2) 平面の $(1,1)$ 付近と $(0,0)$ 付近をみると、いずれのコピュラでも、サンプルは45度線付近に比較的集まっているが、正規コピュラの方がばらつき度合いが大きいように窺われる。これは、図の右上側（各変量とも1に近い側）と左下側（同0に近い側）で、tコピュラは、正規コピュラに比べて、相対的に、一方の変量で大きな変動が起きたときに他方の変量に同方向の変動が起こりやすいことを示している。その一方で、 $(1,1)$ 付近と $(0,0)$ 付近から外れた領域では、tコピュラでは、 $(0,1)$ あるいは $(1,0)$ に近いサンプルも発生している。これは、tコピュラは、正規コピュラと比較して、相対的に、一方の変量で大きな変動が起きたときには他方の変量に逆方向の変動も起こりやすいことを示唆している。

次に、残りの3種類のコピュラをみてみよう。クレイトン・コピュラでは、変量間の依存度合いは、相対的に左下側で強く、右上側で弱い。ガンベル・コピュラでは、クレイトン・コピュラとは逆に、変量間の依存度合いは、相対的に左下側で弱く、右上側で強い。これらに対し、フランク・コピュラでは、変量間の依存度合いが強い領域はみられない。

このように、コピュラによって、表現される変量間の依存関係に特徴がある。したがって、市場等で実際に観測される各リスク・ファクターの変動から、それらの間に一定の依存関係を推論することができたならば、そのような依存関係を近似的に表すことが可能なコピュラを適切に選択すればよい。それによって、リスク・ファクター間の依存関係を織り込んだ形で、リスク・ファクターの将来的な確率変動をシミュレーションによって表現することができる。

(3) コピュラの性質：分布の裾での依存関係

ここでは、2変量を仮定し、コピュラを用いて、分布の裾での変量間の依存関係を考察する。以下、分布の裾での変量間の依存関係を示す指標を定義する。

連続な分布関数 F_1, F_2 に従う確率変数をそれぞれ X_1, X_2 とする。 X_1, X_2 の「上側裾依存係数」を次の極限值として定義する。

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)). \quad (4)$$

(4)式は、閾値 u を1に近づけた際、 X_1 の分布関数が u より大きい ($F_1(X_1) > u$) という条件で、 X_2 の分布関数が u より大きい ($F_2(X_2) > u$) 確率である。このとき、 $0 < \lambda_U \leq 1$ ならば、 X_1, X_2 は「上側で漸近依存」の関係にあるといい、 $\lambda_U = 0$ ならば、 X_1, X_2 は「上側で漸近独立」の関係にあるという。(4)式右辺を変形すると、 X_1, X_2 のコピュラを C とすることで、以下を得る。

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u)) - \Pr(X_2 \leq F_2^{-1}(u)) + \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(u))}{1 - \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned} \quad (5)$$

これは、さらにロピタルの定理から、(6)式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \left\{ \left(1 - \frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) + \left(1 - \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) \right\} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \{ \Pr(U_2 > u | U_1 = u) + \Pr(U_1 > u | U_2 = u) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 U_1, U_2 は区間 $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数である。このとき、 $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ であるならば、次式が得られる。

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(U_1 > u | U_2 = u). \quad (7)$$

同様に、 X_1, X_2 の「下側裾依存係数」を(8)式で定義する。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr(X_2 < F_2^{-1}(u) | X_1 < F_1^{-1}(u)). \quad (8)$$

(8)式は、閾値 u を0に近づけた際、 X_1 の分布関数が u より小さい ($F_1(X_1) < u$) という条件で、 X_2 の分布関数が u より小さい ($F_2(X_2) < u$) 確率である。上側の場合と同様、 $0 < \lambda_L \leq 1$ ならば、 X_1, X_2 は「下側で漸近依存」の関係にあるといい、 $\lambda_L = 0$ な

らば、 X_1, X_2 は「下側で漸近独立」の関係にあるという。(5)式と同様の変形により、次式を得る。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (9)$$

$C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ であるならば、以下の関係を得る。

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr(U_1 < u | U_2 = u). \quad (10)$$

なお、上側でも下側でも漸近独立である場合、 X_1, X_2 は「漸近独立」の関係にあるという。

(4) コピュラの性質：順位相関 - 分布の全体での依存の程度

本節(3)では、分布の裾での変量間の依存関係に注目した。しかし、変量間の依存関係といえば、一般的には、分布全体での変量間の依存関係を表すことが多い。ここでは、分布全体での変量間の依存関係と、分布の裾での変量間の依存関係の間にどのような関連性があるのかを説明する。

変量間の依存度合いを表す指標として最もよく使われているものは、「線形相関(相関係数)」である。 N 個の2変量データ $(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2), \dots, (x_1^N, x_2^N)$ を観測したとすると、これらのデータの線形相関は次式で推定される。

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^N (x_1^j - \bar{x}_1)(x_2^j - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_1^j - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_2^j - \bar{x}_2)^2}}, \quad \text{ただし } \bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j. \quad (11)$$

線形相関は、2つの変量の間、線形(直線的)な関係を捉える指標であって、その点で、直線的な関係にない変量間の依存関係を表現することは基本的にできない⁴。

線形相関のこうした問題を回避する、変量間の依存度合いを表す別の指標として、「順位相関」と呼ばれる相関がある。順位相関は、各変量のデータの値そのものではなく、何らかの基準による各変量のデータの「順位」に基づく相関である⁵。

順位相関にはいくつかの種類が考えられているが、実務でよく用いられるものに、「ケンドールのタウ(τ)」と「スピアマンのロー(ρ_s)」がある。

4 これを具体例でみてみよう(Mina and Xiao [2001])。Zを確率変数とし、これを変換した確率変数 $X = \exp(Z)$ 、 $Y = \exp(5Z)$ を考える。XとYには、非線形ではあるが、明らかに非常に強い依存関係がある。しかし、線形相関を計算すると、その値は0.0004と非常に小さく、XとYの間には依存関係はほとんどないことになる。

5 順位相関の詳細は、柳川[1982]、Kruskal[1958]、Joe[1997]、Nelsen[1998]等を参照。

ここで、 (X_1^i, X_2^i) と (X_1^j, X_2^j) を同時分布関数 $F(x_1, x_2)$ 、周辺分布 $F_1(x_1)$ 、 $F_2(x_2)$ に従う確率変数ベクトルとする。

まず、ケンドールのタウは、2つの確率変数ベクトルを用いて、次式で定義される指標である。

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\} \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

X_1 と X_2 の間に、 $X_1^i > X_1^j$ かつ $X_2^i > X_2^j$ という関係が常に成立する (concordant < 調和 >) ならば、 $\tau = 1$ となり、 $X_1^i > X_1^j$ かつ $X_2^i < X_2^j$ という関係が常に成立する (discordant < 非調和 >) ならば、 $\tau = -1$ となる。また、 $-1 \leq \tau \leq 1$ が成立する。

一方、スピアマンのロー ρ_s は、周辺分布 $F_1(x_1)$ 、 $F_2(x_2)$ の線形相関として、以下のように定義される ($-1 \leq \rho_s \leq 1$ である)^{6, 7, 8}。

$$\begin{aligned} \rho_s &\equiv \frac{\text{cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))}{\sqrt{\text{var}(F_1(X_1))} \sqrt{\text{var}(F_2(X_2))}} \\ &= 12 \text{cov}(F_1(X_1), F_2(X_2)) \\ &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x_1, x_2) - F_1(x_1) F_2(x_2)\} dF_1(x_1) dF_2(x_2). \end{aligned} \quad (13)$$

ケンドールのタウとスピアマンのローは、コンピュータを用いて表現することができる。 $u_1 = F_1(x_1)$ 、 $u_2 = F_2(x_2)$ と置いて、コンピュータを $C(u_1, u_2)$ とすると、これらの関係は以下のように書き換えられる⁹。

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1, \quad (14)$$

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(u_1, u_2) - u_1 u_2\} du_1 du_2. \quad (15)$$

つまり、コンピュータの関数形が与えられれば、ケンドールのタウとスピアマンのローは、それぞれ(14)式と(15)式で求めることができる^{10, 11}。

6 (13)式の2番目の等号で出てくる「12」という値は、一様分布の分散(1/12)から来ているものである。
7 スピアマンのローは、上述したケンドールのタウの定義で用いられる“concordant”と“discordant”の考え方を使得て定義することも可能である。その詳細は、例えば、Nelsen [1998] を参照。
8 脚注4の例では、 X と Y の順位相関は、ケンドールのタウでもスピアマンのローでも1となる。
9 詳細は、Schweizer and Wolff [1981]、Nelsen [1998] 等を参照。
10 上述の図1を作成するに当たっては、分布全体での2変量間の依存度合いを一定としたうえで各コンピュータの依存関係を比較することができるように、ケンドールのタウを定数(0.75)として与えて、各コンピュータのパラメータを定めた。
11 このように、ケンドールのタウやスピアマンのローといった順位相関は、コンピュータで表現可能である一方、線形相関は、周辺分布にも依存し、コンピュータだけでは表現されない。つまり、線形相関は、変量間の依存構造(コンピュータ)と各変量特有の構造(周辺分布)を分けて捉えることができない。したがって、線形相関は変量間の依存構造を示す指標としては十分であると必ずしもいえないことになる。

(5) コピュラのパラメータ推定

以降では、本節(2)で説明したコピュラを対象に、コピュラの各種パラメータの推定方法や、それらコピュラを用いたポートフォリオのリスク量の算出手法を具体例を交えつつ解説する。

実務でコピュラを用いる際には、まずは、リスク評価の対象とするポートフォリオの特性等に基づいて、適当と考えられるコピュラを選択することになる。次に必要となるのが、そのコピュラの各種パラメータを推定することである。

ここでは、コピュラが選ばれたとしたうえで、このコピュラのパラメータ推定手法を取り上げる。実務で最も一般的に用いられている、コピュラのパラメータ推定手法は、リスク・ファクターのヒストリカル・データを用いる方法である。

ヒストリカル・データを用いたパラメータ推定は、例えば、以下のように最尤法を用いて行える。 n 個の変量を仮定する。このとき、各変量は N 個のヒストリカル・データを持つとする。第 i 変量の第 j 番目のヒストリカル・データを x_i^j と表す($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$)。第 i 変量の周辺分布関数を、パラメータを ψ_i として $F_i(\cdot; \psi_i)$ 、コピュラの密度関数を、 a をパラメータとして $c(\cdot; a)$ とする。このとき、対数尤度関数は、(3)式を用いることで、(16)式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & l(\psi_1, \dots, \psi_n, a) \\
 &= \sum_{j=1}^N \ln c((F_1(x_1^j; \psi_1), \dots, F_n(x_n^j; \psi_n)); a) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i^j; \psi_i). \quad (16)
 \end{aligned}$$

(16)式で最尤推定を行うということは、コピュラのパラメータの推定と周辺分布の確率密度関数のパラメータの推定を同時に行うことにほかならない。しかし、この方法は、全てのパラメータを同時に推定しようとするため、最適化の計算が複雑になり、計算負荷が大きいという難点を有する。このため、先行研究では、まず周辺分布を特定したうえで、その後にコピュラのパラメータ推定を行うことが多い。例えば、周辺分布のパラメータ(ψ_i)を先に最尤推定したうえで、(16)式に与え、(16)式を最大化するパラメータ(a)を推定する方法(Mashal and Naldi [2002]等)や、周辺経験分布関数 $\hat{F}_i(\cdot)$ を求めてから、(16)式右辺第1項を最大化するパラメータ(a)を推定する方法(Romano [2002]等)が提案されている。

Bouyé *et al.* [2000]では、周辺分布が指数分布とガンマ分布、依存構造が正規コピュラである2変量同時分布を対象に、(16)式で最尤推定を行う方法とその代替方法でそれぞれ推定されたパラメータの比較を行っている。具体的には、次のような手続きを採用している。まず、与えられた同時分布に従う乱数を1,000個発生させる。次に、この乱数データを用いて、(16)式で最尤推定を行う方法とその代替方法で、それぞれパラメータを推定する。このと の手続きを2,500回繰り返す。Bouyé *et al.* [2000]は、こうして各方法で得られたパラメータ推定値の分布の形状を比較した結果、それらにはほとんど差がないことを示した。このことから、

上記のような代替方法を用いて、(16)式のパラメータを求めることは、実務的には一定の範囲で許容されると考えられる。

以下では、上述の代替方法のうち、周辺分布のパラメータを最尤推定したうえで、コピュラのパラメータを最尤推定する方法 (Mashal and Naldi [2002] 等) を採用する¹²。

(6) コピュラの選択基準

本節(5)では、コピュラの選択が行われたとしたうえで、このコピュラのパラメータ推定手法を説明した。次に、コピュラを選び出す基準に焦点を当てる。その選択基準の1つとして、対象とする実際のデータ(ヒストリカル・データ)の経験的な同時分布と、コピュラによって求められた同時分布との相違が最も少ないことが考えられる。以下では、この基準を検討する。

経験的な同時分布から、周辺分布をその経験分布で与えて導いたコピュラを「経験コピュラ」と呼ぶ(Deheuvels [1979])。

経験コピュラは、次のように求められる。 N 個の n 変量データ $(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^N, \dots, x_n^N)$ を観測したとする。第 i 変量の値を小さい順に並べ替え、 $x_i^k (k=1, \dots, N)$ が r_i^k 番目になったとする(r_i^k は $1 \sim N$ の整数をとる)。これから、第 i 変量の周辺経験分布は、第 i 変量が $X_i \leq x_i^k$ となる頻度は r_i^k/N となることを用いることで、得ることができる。次に、同時分布は、周辺経験分布関数の値が $t_i/N (t_i=1, \dots, N)$ であるという条件で、コピュラ C を用いて $C(t_1/N, \dots, t_n/N)$ となる。この同時分布は、 $(r_1^k \leq t_1, \dots, r_n^k \leq t_n)$ を満たすデータ k の数をデータの総数 N で除した値を用いて、推定可能である。したがって、コピュラ $C(t_1/N, \dots, t_n/N)$ に対応する経験コピュラ $\hat{C}(t_1/N, \dots, t_n/N)$ は、次式で表される。

$$\hat{C}(t_1/N, \dots, t_n/N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^n 1_{\{r_i^k \leq t_i\}} \quad (17)$$

上述のように、コピュラを選択する基準としては、(17)式の経験コピュラとの相違が最も少ないコピュラを選択することが考えられる。先行研究(Romano [2002])では、対象とするコピュラの集合を $\{C_l\}_{1 \leq l \leq L}$ として、その「相違」を(18)式で定義し、それを最小化する C_l を採用することを提案している¹³。

12 いくつかのコピュラについては、(14)式または(15)式を基に、2変量データのケンドールのタウとコピュラのパラメータとの解析的関係を求めることができるため、周辺分布を仮定することなく、コピュラのパラメータの推定が行える(補論2.参照)。

13 ここでは、(18)式をコピュラを選択基準として用いたが、(18)式は、あるコピュラのパラメータが未知である場合に、その推定に用いることもできる。具体的には、(18)式を最小化するパラメータを推定量とすればよい。

$$d_n(\hat{C}, C_l) \equiv \sqrt{\sum_{t_1=1}^N \dots \sum_{t_n=1}^N \left[\hat{C} \left(\frac{t_1}{N}, \dots, \frac{t_n}{N} \right) - C_l \left(\frac{t_1}{N}, \dots, \frac{t_n}{N} \right) \right]^2} . \quad (18)$$

以上、コンピュータの選択基準の一例として、「経験コンピュータとの『相違』を最小にするコンピュータを選択する」という考え方を説明したが、この基準には、1点留意すべきことがある。それは、比較を行う各コンピュータのパラメータ数あるいは自由度が同程度であるとの前提が暗に置かれている点である。つまり、この基準は、同程度のパラメータ数を持つコンピュータを候補に考えたときに、その中で最も望ましいコンピュータを選び出すために使用すべき基準である。これに対し、互いに異なるパラメータ数を有するコンピュータを前提として、Breymann, Dias and Embrechts [2003] は、対数尤度をパラメータ数で調整した指標であるAIC (Akaike Information Criterion) を、コンピュータの選択基準としている。

(7) コンピュータを用いた乱数発生

金融商品の価格やリスクの特性を評価する際、各リスク・ファクター(確率変数)の分布が個別に求められれば、あるコンピュータを特定することにより、それらの組合せで表現される同時分布から金融商品の価格やリスクの特性を評価することが可能となる。解析的な評価が難しい場合でも、求めた同時分布(コンピュータと各周辺分布)に従う乱数を発生させ、シミュレーションによって評価を行うことができる。ここでは、その手順を説明する。

一般に、ある分布関数 F に従う乱数 X を発生させるには、 $[0, 1]$ の一様分布に従う乱数 U を用いて、 $X = F^{-1}(U)$ と変換すればよいことが知られている¹⁴。一方、コンピュータは、周辺分布として $[0, 1]$ の一様分布関数を持ち、特定の依存構造を持つ同時分布関数である。つまり、コンピュータ $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う一様乱数 U_1, \dots, U_n を発生させることができれば、任意の周辺分布関数 F_i で $X_i = F_i^{-1}(U_i)$ と変換することで、任意の各周辺分布関数 F_1, \dots, F_n に従い、かつ当該コンピュータの依存構造を持つ乱数 X_1, \dots, X_n を発生させることができる。 $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う一様乱数 U_1, \dots, U_n の具体的な発生手順は、コンピュータの種類に応じて後述する。

14 この方法を逆関数法と呼ぶ。詳しくは伏見 [1989] を参照。

3. 正規コピュラとtコピュラ

(1) 正規コピュラ

イ. 定義

正規コピュラは、多変量正規分布と同じ依存構造を持つコピュラである。確率変数 X_1, \dots, X_n が、相関行列を Σ とする n 変量標準正規分布に従うとき、その分布関数を $\Phi_n(x_1, \dots, x_n; \Sigma)$ と表すことにする¹⁵。 n 変量標準正規分布の周辺分布は (1 変量) 標準正規分布であるから、1 変量標準正規分布の分布関数を $\Phi_1(\cdot)$ とすれば、スクラーの定理から、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \Phi_n(x_1, \dots, x_n; \Sigma) = C(\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_1(x_n)), \quad (19)$$

のように、各周辺分布関数を結び付けるコピュラ $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ が一意に存在する。ここで、

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_n(\Phi_1^{-1}(u_1), \dots, \Phi_1^{-1}(u_n); \Sigma), \quad (20)$$

と置けば、これは、(19)式を満たしていることを確認することができ、 n 変量正規分布のコピュラになっていることがわかる。このコピュラは、多変量正規分布の各変量間の依存関係を示していることから、「正規コピュラ」と呼ばれる。

正規コピュラの密度関数 $c(u_1, \dots, u_n)$ は、(3)式により、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x\right) \\ &= c(\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_1(x_n)) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right), \end{aligned} \quad (21)$$

という関係を満たす。よって、 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T = (\Phi_1^{-1}(u_1), \dots, \Phi_1^{-1}(u_n))^T = \Phi_1^{-1}(\mathbf{u})$ と置き、単位行列を \mathbf{I} とすれば、以下を得る。

$$C(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \omega\right), \quad \omega = \Phi_1^{-1}(\mathbf{u}). \quad (22)$$

.....
15 n 変量標準正規分布の分布関数は以下で表される。

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} \exp\left(-\frac{1}{2} (z_1, \dots, z_n) \Sigma^{-1} (z_1, \dots, z_n)^T\right) dz_1 \dots dz_n$$

正規コンピュータを用いれば、周辺分布を1変量標準正規分布とすることで多変量正規分布が得られる。また、周辺分布を1変量標準正規分布以外の分布とすることで、多変量正規分布とは異なる同時分布を得る。

ロ. 正規コンピュータに従う乱数の発生方法

正規コンピュータに従う乱数は次のアルゴリズムで発生させることができる。

アルゴリズム (正規コンピュータに従う乱数発生法)

1. コレスキー分解法等を用いて、相関行列 Σ の n 変量標準正規分布に従う乱数 x_1, \dots, x_n を発生させる¹⁶。
2. 1変量標準正規分布の分布関数 Φ_1 により、 $u_i = \Phi_1(x_i)$ とする ($i = 1, \dots, n$)

i 番目の周辺分布を任意の分布 (分布関数 F_i) とするとき、各変量の依存構造が正規コンピュータに従う乱数を発生させるには、アルゴリズムの2. で発生させた各 u_i を用いて、 $F_i^{-1}(u_i)$ とすればよい。

ハ. 正規コンピュータのパラメータ推定方法

正規コンピュータに従う乱数を発生させるには、そのパラメータ (相関行列) Σ を別途推定する必要がある。ここでは、その推定に最尤法を用いる。

正規コンピュータの対数尤度関数は、(22)式により、ヒストリカル・データの数 N のときには、次式で与えられる。

$$l(\Sigma) = -\frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\omega}^j T (\Sigma^{-1} - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{\omega}^j, \quad \boldsymbol{\omega}^j = \Phi_1^{-1}(u^j). \quad (23)$$

この対数尤度関数を相関行列の逆行列 Σ^{-1} で微分すると¹⁷、

$$\frac{\partial l(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{N}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{jT}, \quad (24)$$

となるから、 Σ の最尤推定量 $\hat{\Sigma}$ は

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{jT}, \quad (25)$$

16 正規分布に従う乱数の発生方法は伏見 [1989] を参照。

17 Σ (相関行列) は対称行列であるから、 Σ^{-1} も対称行列であり、 Σ^{-1} の余因子を $\bar{\sigma}_{ij}$ とすると $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$ となる。行列式の余因子展開および逆行列の余因子表現を考えれば、以下を得る。

$$\frac{\partial (-\ln |\Sigma|)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{\partial (\ln |\Sigma^{-1}|)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} \frac{\partial |\Sigma^{-1}|}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} (\{\bar{\sigma}_{ij}\}) = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} (\{\bar{\sigma}_{ji}\}) = (\Sigma^{-1})^{-1} = \Sigma.$$

ここで、 $(\{\bar{\sigma}_{ij}\})$ は $\bar{\sigma}_{ij}$ からなる行列である。なお、行列の微分演算はMagnus and Neudecker [1988] に詳しい。

となる¹⁸。以上より、正規コピュラのパラメータは次の手順で求められる。

アルゴリズム (正規コピュラのパラメータ推定法)

1. 変量数 n 、データ数 N の原データ x_i^j ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) を、周辺分布ごとに $[0, 1]$ の一様分布 $u_i^j = F_i(x_i^j)$ に変換する。
2. u_i^j を $\omega_i^j = \Phi_1^{-1}(u_i^j)$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) により正規分布に従うデータに変換する。
3. $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_i^j \omega_k^j$ ($i, k = 1, \dots, n$) を計算し、これを推定量 $\hat{\Sigma}_{i,k}$ (相関行列 Σ の i 行 k 列成分の推定量) とする。

二. 正規コピュラの裾の依存

多変量正規分布の分布関数を基に表現される正規コピュラは、実務では、その単純さや取扱いの容易さから多用されている。しかし、正規コピュラは、同時分布に正規性を仮定しているため、実務上、特にリスク・ファクターの分布の裾での変量間の依存関係を捉え切れない場合があるという問題がある。(4)式の上側裾依存係数を用いて、この点を考察する。正規コピュラの上側裾依存係数は(7)式で計算される。相関 ρ の2変量正規分布に従う確率変数 (X_1, X_2) は、 $X_2 = x$ の条件の下で、 X_1 が1変量正規分布 $N(\rho x, 1 - \rho^2)$ に従うことから、

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(U_1 > u \mid U_2 = u) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(\Phi_1^{-1}(U_1) > x \mid \Phi_1^{-1}(U_2) = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(X_1 > x \mid X_2 = x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi_1 \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi_1 \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) \right), \end{aligned} \tag{26}$$

となる。同様に、下側裾依存係数は、(8)式から、

$$\lambda_L = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_1 \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right), \tag{27}$$

となる。 $-1 < \rho < 1$ の場合には、これらの極限值は0となる。つまり、正規コピュラでは、上側、下側のいずれでも漸近独立である¹⁹。このことは、正規コピュラでは、

18 相関行列の対角要素は、定義により1であるが、(25)式で推定された相関行列は、推定誤差を伴うため、対角要素が1になるとは必ずしも限らない。そこで、ここでは、先行研究 (Bouyé *et al.* [2000]) にならい、(25)式で推定された相関行列を便宜的に分散共分散行列とみなすことで、そこから対角要素が1の相関行列を導出することにした。

リスク・ファクターの分布の裾での依存事象とみなすことが可能な事象、例えば、複数のデフォルトの同時的な発生、関連会社の株価の同時的な大幅変動といった事象を十分に表現し得ないことを示唆している。したがって、リスク・ファクター間で分布の裾での依存関係が強い場合には、正規コピュラを用いたリスク計量は必ずしも適当ではないことになる。

(2) tコピュラ

イ. 定義

分布の裾での変量間の依存関係が強い場合に、その依存関係を正規分布よりもうまく表現しうるコピュラとして、「tコピュラ」を考える。tコピュラは、正規分布よりも厚い裾を持つ分布であるt分布を基にしたコピュラである。具体的には、自由度 ν 、相関行列 Σ の n 変量t分布の分布関数を $t_{\nu, \Sigma}^n(\cdot)$ 、自由度 ν の1変量t分布の分布関数を $t_{\nu}(\cdot)$ として、(28)式のように定義される²⁰。ここで、自由度 ν は3以上である。

$$C_{\nu, \Sigma}^n(\mathbf{u}) = t_{\nu, \Sigma}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)) \quad (28)$$

tコピュラの密度関数は、(3)式により、 $\omega^T = (\omega_1, \dots, \omega_n) = (t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))$ として、次式のように表せる。ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である²¹。

$$c(u_1, \dots, u_n; \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^n \left(1 + \frac{1}{\nu} \omega^T \Sigma^{-1} \omega\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right]^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (29)$$

ロ. tコピュラの裾の依存

分布の裾でのtコピュラの依存関係を考察するため、tコピュラの裾依存係数を計算する。自由度 ν 、相関 ρ を持つ2変量t分布に従う確率変数 (X_1, X_2) を考える。 $X_2 = x$ のとき、 X_1 は、自由度 $\nu+1$ のt分布になり、その平均、分散はそれぞれ $E[X_1 | X_2 = x] = \rho x$ 、 $Var[X_1 | X_2 = x] = (1-\rho^2)(\nu+x^2)/(\nu+1)$ である。これらの関係を用いれば、上側裾依存係数は、自由度 $\nu+1$ のt分布の分布関数を $t_{\nu+1}(\cdot)$ として、(7)式より次式で計算される。

19 $\rho=1$ (-1)では、漸近依存(漸近独立)となる。

20 n 変量t分布の分布関数は次式で表される。 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である(脚注21参照)。

$$t_{\nu, \Sigma}^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} d\mathbf{x}.$$

21 ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は、 $\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ で定義される。

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr (X_1 > x | X_2 = x) \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - t_{\nu+1} \left(x(1-\rho) \sqrt{\frac{(\nu+1)}{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}} \right) \right) \\
&= 2 \left(1 - t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}} \right) \right). \tag{30}
\end{aligned}$$

同様に、下側裾依存係数は、(8)式より、

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(t_{\nu+1} \left(x(1-\rho) \sqrt{\frac{(\nu+1)}{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}} \right) \right) \\
&= 2 t_{\nu+1} \left(- \sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}} \right), \tag{31}
\end{aligned}$$

となる。上側・下側裾依存係数は、 $-1 < \rho < 1$ のとき、0にならない。つまり、tコピュラでは、2つの変数が上側でも下側でも漸近依存する²²。したがって、リスク・ファクターの分布の裾での依存関係が強いときには、依存関係の表現には、上側、下側とも漸近独立となる正規コピュラよりも、tコピュラを用いる方が適当である。

八. tコピュラに従う乱数の発生方法

tコピュラの各変量間の依存関係は、多変量t分布の依存関係と等しい。また、多変量t分布は、周辺分布が1変量t分布であり、かつその依存関係が多変量tコピュラで表現される分布であるとみなせる。したがって、多変量t分布に従う各周辺分布を、それぞれ $[0, 1]$ の一様分布に変換したものがtコピュラに従う変量となる。

多変量t分布に従う乱数は、多変量正規分布に従う乱数と、自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数を用いることで発生させることができる²³。自由度 ν 、相関行列 Σ を持つtコピュラに従う乱数は、次のアルゴリズムによって得られる。

アルゴリズム (tコピュラに従う乱数発生法)

1. 相関行列 Σ を持つ多変量正規分布に従う乱数 Y_1, \dots, Y_n を発生させる。
2. Y_i とは独立に、自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数 Z を発生させる。
3. $X_i = \sqrt{\nu} Y_i / \sqrt{Z}$ を求める (X_i は自由度 ν 、相関行列 Σ を持つt分布に従う)。
4. $u_i = t_\nu(X_i)$ を計算する。

22 正規コピュラと同様に、 $\rho = 1$ (-1)では漸近依存 (漸近独立)である。

23 独立に1変量標準正規分布に従う ν 個の乱数 X_1, \dots, X_ν を用いれば、 $Z = \sum_{k=1}^{\nu} X_k^2$ が自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数となる。

二. tコピュラのパラメータ推定方法

tコピュラに従う乱数を発生させる際には、そのパラメータである ν と Σ を指定する必要がある。以下では、正規コピュラのケースと同様に、ヒストリカル・データから、最尤法によりパラメータ推定を行う方法を検討する。

tコピュラは、自由度 ν と相関行列 Σ をパラメータとして持つ。それらを同時に推定することは容易でないので、ここでは、自由度 ν に複数の値を外生的に与え、それぞれ行列 Σ の推定量 $\hat{\Sigma}_\nu$ を求める。こうして得られた ν と $\hat{\Sigma}_\nu$ の組合せのうち、対数尤度が最大になる組合せを最尤推定量とする。

自由度 ν が所与のときの対数尤度関数は、データ数を N とすると、(29)式により次式で表せる。

$$l(\Sigma, \nu) = N \left[\ln \Gamma \left(\frac{\nu+n}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + nN \left[\ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \right] \\ - \frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{\nu+n}{2} \sum_{j=1}^N \ln \left(1 + \frac{\boldsymbol{\omega}^j \Sigma^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}{\nu} \right) + \frac{\nu+1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\omega}^j)_i^2}{\nu} \right). \quad (32)$$

ここで $(\boldsymbol{\omega}^j)_i = t_{\nu}^{-1}((u^j)_i)$ である。これを逆行列 Σ^{-1} で微分すると、

$$\frac{\partial l(\Sigma, \nu)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{N}{2} \Sigma^{-1} - \frac{\nu+n}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{jT}}{\nu + \boldsymbol{\omega}^{jT} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}, \quad (33)$$

となることから、

$$\hat{\Sigma}_\nu = \frac{\nu+n}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{jT}}{\nu + \boldsymbol{\omega}^{jT} \hat{\Sigma}_\nu^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}, \quad (34)$$

となる $\hat{\Sigma}_\nu$ が自由度 ν が所与のときの最尤推定量となる。ただし、この $\hat{\Sigma}_\nu$ は、(34)式の右辺に $\hat{\Sigma}_\nu$ を含み、解析的に求められないので、数値的な反復計算で求める。

以上から、tコピュラのパラメータは次の手順で求められる。

tコピュラのパラメータ推定の概略

1. ν に外生的に値を与えて、(34)式を満たす $\hat{\Sigma}_\nu$ を求め、(32)式により、対数尤度 $l(\hat{\Sigma}_\nu, \nu)$ を求める。
2. 1.をさまざまな ν で行い、対数尤度 $l(\hat{\Sigma}_\nu, \nu)$ を最大化する ν 、 $\hat{\Sigma}_\nu$ をtコピュラのパラメータの推定量とする。

上記概略の1.で(34)式を満たす $\hat{\Sigma}_\nu$ は解析的には求められないことから、それを数値計算により求めるとすると、具体的なアルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム (tコピュラのパラメータ推定法)

1. 原データ ($\mathbf{x}: n \times 1$ 行列) を、仮定した周辺分布関数を用いて $[0, 1]$ の一様分布 \mathbf{u} に変換する ($\mathbf{u} = F(\mathbf{x})$)。
2. 正規分布に従うデータに変換する ($\mathbf{f} = \Phi_1^{-1}(\mathbf{u})$)。
3. 変換後のデータ \mathbf{f} を用いて相関行列を計算し $\hat{\Sigma}(0)$ とする。
4. $\omega = t_\nu^{-1}(\mathbf{u})$ によりデータを自由度 ν の t 分布に従う確率変数に変換する。
5. 以下の漸化式により $\hat{\Sigma}(m+1)$ を計算し、3. と同様に相関行列に変換する。

$$\hat{\Sigma}(m+1) = \frac{\nu+n}{N\nu} \sum_{j=1}^N \frac{\boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{jT}}{\nu + \boldsymbol{\omega}^{jT} \hat{\Sigma}(m)^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}.$$

6. 5. を収束するまで反復し、収束値を $\hat{\Sigma}_\nu$ とする。
7. 4. から6. までは、 $\nu=3,4,\dots$ で計算し、対数尤度を最大化する ν と対応する $\hat{\Sigma}_\nu$ を ν 、 Σ の推定量とする。

ホ. tコピュラのパラメータ推定の数値例

ここでは、上述したtコピュラのパラメータ推定方法の数値例を示す。上記アルゴリズムの1. で、データを一様分布に変換するための分布を「経験分布」とし、パラメータ推定を行う。具体的なプログラムの一例として、統計言語Rによるコードを補論1. に載せる²⁴。

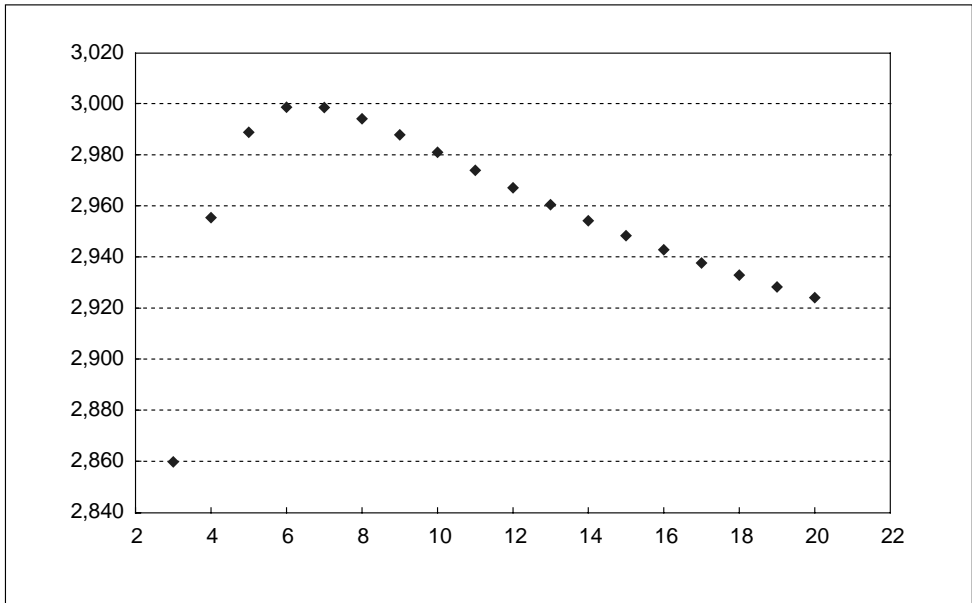
4変量tコピュラでパラメータ推定を試みる。自由度を $\nu=6$ 、相関行列を(35)式とする4変量tコピュラに従う乱数を2,000個発生させる。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.6 & 0.8 & 0.3 \\ -0.6 & 1.0 & -0.2 & 0.4 \\ 0.8 & -0.2 & 1.0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

以下では、この乱数データがパラメータが未知の4変量tコピュラに従うとの前提で、このデータからパラメータを推定する。自由度 $\nu=3,4,\dots$ で、 $\hat{\Sigma}_\nu$ と対数尤度を求める。自由度 ν に対して対数尤度をプロットすると、図2のようになり、自由度 ν は6と推定される。

24 統計言語Rは、GNUプロジェクトの一環で開発されたフリーウェア・ソフトであり、行列処理が行える統計言語Sと似た機能を持つ。

図2 自由度（横軸）と対数尤度（縦軸）



また、自由度 $\nu=6$ で推定された相関行列 $\hat{\Sigma}_\nu$ は、(36)式のようになった²⁵。 $\hat{\Sigma}_\nu$ は、(35)式で仮定した相関行列とほぼ等しいことが確認される。これは、ここで示したアルゴリズムが有効であることを示唆している。

$$\hat{\Sigma}_\nu = \begin{bmatrix} 1.0000000 & -0.5940476 & 0.7853495 & 0.3217245 \\ -0.5940476 & 1.0000000 & -0.1849204 & 0.3891923 \\ 0.7853495 & -0.1849204 & 1.0000000 & 0.4020530 \\ 0.3217245 & 0.3891923 & 0.4020530 & 1.0000000 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

4 . アルキメディアン・コピュラ

(1) アルキメディアン・コピュラ

コピュラの1つのクラスとして、 $\phi(1) = 0, \forall u \in (0, 1), \phi'(u) < 0, \phi''(u) \geq 0$ を満たす生成関数と呼ばれる関数 $\phi(\cdot)$ を用いて、(37)式で表現されるアルキメディアン・コピュラがある。

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)). \quad (37)$$

²⁵ 脚注18と同様に、推定相関行列の対角要素が1となるような操作を施している（tコピュラのパラメータ推定法の5を参照）。

このクラスに属するコピュラは、それに従う乱数を発生させる方法が知られている等、実務的にも扱いやすいといわれている。本稿では、アルキメディアン・コピュラの中でもよく使われるコピュラとして、1パラメータで表現可能な「クレイトン (Clayton)・コピュラ」, 「ガンベル (Gumbel)・コピュラ」, 「フランク (Frank)・コピュラ」の3つを取り上げる。

(2) アルキメディアン・コピュラに従う乱数の発生方法

イ. 逆関数法

コピュラ $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う乱数の発生方法として、1変量分布に従う乱数の発生法である「逆関数法」を多変量の場合に拡張することが考えられる。

最初に、2変量 ($n=2$) の場合で検討する。コピュラ $C(u_1, u_2)$ に従う乱数 (u_1, u_2) を発生させる。まず、コピュラ $C(u_1, u_2)$ に関係なく、 $[0, 1]$ の一様分布に従う乱数 u_1 を発生させる。次に、コピュラ $C(u_1, u_2)$ を用いて、 u_2 を構成する。ここで、コピュラ $C(u_1, u_2)$ は確率変数 (U_1, U_2) の分布関数であり、密度関数は $c(u_1, u_2)$ で表されることに注意する。 u_1 が所与のときの u_2 の条件付分布関数 $C_2(u_2 | u_1)$ は、次式で表される。

$$C_2(u_2 | u_1) \equiv P_r(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\int_0^{u_2} c(u_1, u) du}{\int_0^1 c(u_1, u) du} \quad (38)$$

$C_2(u_2 | u_1)$ は1変量の分布関数であるから、その逆関数を $C_2^{-1}(\cdot | u_1)$ とすると、逆関数法を用いて、 $[0, 1]$ の一様乱数 v で $u_2 = C_2^{-1}(v | u_1)$ とすれば、 u_2 を得ることができる。

3変量以上の場合でも、同様の考え方で、各変量 u_3, \dots, u_n を得ることができる。 $C_i(u_1, \dots, u_i) \equiv C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)$ 、 $c_i(u_1, \dots, u_i) \equiv \partial^i C_i(u_1, \dots, u_i) / \partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_i$ とすれば、

$$C_{i+1}(u_{i+1} | u_1, \dots, u_i) \equiv P_r(U_{i+1} \leq u_{i+1} | U_1 = u_1, \dots, U_i = u_i) = \frac{\int_0^{u_{i+1}} c_{i+1}(u_1, \dots, u_i, u) du}{c_i(u_1, \dots, u_i)} \quad (39)$$

となる。よって、(39)式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot | u_1, \dots, u_i)$ が逐次的に得られれば、 $[0, 1]$ の一様乱数 v で $u_{i+1} = C_{i+1}^{-1}(v | u_1, \dots, u_i)$ として、乱数 (u_1, u_2, \dots, u_n) を求めることができる。

アルキメディアン・コピュラで、(39)式の $C_{i+1}(u_{i+1} | u_1, \dots, u_i)$ を計算する。 ϕ^{-1} の i 階微分を $\phi^{-1(i)}$ として、

$$c_i(u_1, \dots, u_i) = \phi^{-1(i)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_i)) \prod_{k=1}^i \phi'(u_k) \quad (40)$$

を得るので、さらに $\psi_i \equiv \phi(u_1) + \dots + \phi(u_i)$ とすると、次式を導出する。

$$C_{i+1}(u_{i+1} | u_1, \dots, u_i) = \frac{\int_0^{u_{i+1}} \phi^{-1(i+1)}(\psi_i + \phi(u)) \phi'(u) du}{\phi^{-1(i)}(\psi_i)} = \frac{\phi^{-1(i)}(\psi_i + \phi(u_{i+1}))}{\phi^{-1(i)}(\psi_i)}. \quad (41)$$

(41)式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot | u_1, \dots, u_i)$ が求められれば、上記の手続きで、アルキメディアン・コピュラに従う乱数を発生させることができる。しかし、一般には、(41)式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot | u_1, \dots, u_i)$ は複雑な形になるため、逆関数法に基づいて乱数を発生させようとすると、重い計算負荷が生ずるといった難点がある。

ロ. マーシャル=オルキン法

(41)式による逆関数法に比べて、より簡単に乱数を発生させる方法として、マーシャル=オルキン法がある (Marshall and Olkin [1988])。Marshall and Olkin [1988] は、同時分布関数が1つの潜在変数 θ を使って(42)式で表せるとき、コピュラに従う乱数を効率的に発生させるアルゴリズムを提案している。

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E_\theta [H_1(x_1)^\theta H_2(x_2)^\theta \cdots H_n(x_n)^\theta] \\ &= \zeta(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n))). \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、 $\zeta(\cdot)$ は潜在変数 θ のラプラス変換である ($\zeta(s) = E_\theta[e^{-s\theta}]$)。

アルキメディアン・コピュラの場合では、(37)式より $\zeta(\cdot)$ が生成関数の逆関数 $\phi^{-1}(\cdot)$ に対応していることがわかる。ここで、 $\zeta(s) = E_\theta[e^{-s\theta}]$ に注目すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\zeta(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n))) \\ &= E_\theta[\exp(-(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n)))\theta)] \\ &= E_\theta[\exp(-\zeta^{-1}(F_1(x_1))\theta) \cdot \exp(-\zeta^{-1}(F_2(x_2))\theta) \cdots \exp(-\zeta^{-1}(F_n(x_n))\theta)]. \end{aligned} \quad (43)$$

(42)式から、

$$H_i(x_i)^\theta = \exp(-\zeta^{-1}(F_i(x_i))\theta), \quad (44)$$

という対応関係があることがわかる。また、 $H_i(x_i)^\theta$ を確率変数とすると、これは $[0, 1]$ の一様分布に従い、(42)式の最初の等号関係から、 $H_1(x_1)^\theta, \dots, H_n(x_n)^\theta$ を独立にサンプリングすればよいことがわかる。つまり、シミュレーションでアルキメディアン・コピュラに従う n 変量の乱数ベクトル (U_1, \dots, U_n) ($U_i = F_i(X_i)$) を1つ発生させるには、次の手続きを用いればよいことになる。

アルゴリズム (マーシャル=オルキン法)

1. ラプラス変換 $E_{\theta}[e^{-s\theta}]$ が $\phi^{-1}(s)$ ($= \zeta(s)$) となるような確率分布に従う潜在変数 θ のサンプル θ_0 を1つ発生させる。
2. θ_0 とは独立に $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \zeta(-\theta_0^{-1} \ln(I_i))$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

アルキメディアン・コピュラに属するコピュラでは、ラプラス変換が $\zeta(s) = \phi^{-1}(s)$ となる潜在変数 θ_0 を発生させることができれば、上記のアルゴリズムを用いて、比較的簡単に、乱数を発生させることができる。

(3) クレイトン・コピュラ

イ. クレイトン・コピュラの性質

クレイトン・コピュラは、 $\alpha (> 0)$ をパラメータとして次式で表される。

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-1/\alpha}. \quad (45)$$

2変量 ($n=2$) のクレイトン・コピュラの裾依存係数は、上側では、ロピタルの定理を用いて、

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + (2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2u^{-\alpha-1} (2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-1}}{-1} = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

となり、漸近独立である。一方、下側では、

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 - u^\alpha)^{-1/\alpha} = 2^{-1/\alpha}, \quad (47)$$

となり、 $\alpha > 0$ より、漸近依存する。つまり、クレイトン・コピュラは、分布の両裾で異なる依存関係を持っている。

ロ. クレイトン・コピュラに従う乱数の発生方法

クレイトン・コピュラの生成関数は $\phi(u_i) = u_i^{-\alpha} - 1$ であるので、その逆関数は $\phi^{-1}(s) = \zeta(s) = (s+1)^{-1/\alpha}$ で与えられる。一方、標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ に従う確率変数 θ のラプラス変換は $\zeta(s) = E[e^{-s\theta}] = (s+1)^{-1/\alpha}$ である²⁶。よって、標準ガンマ分布

26 標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ の確率密度関数は、 $f(x) = x^{1/\alpha-1} e^{-x} / \Gamma(1/\alpha)$ で与えられる。ここで、 $\Gamma(1/\alpha)$ は $1/\alpha$ でのガンマ関数 (脚注21) の値である。

$G(1/\alpha)$ に従う乱数 θ_0 を発生させれば²⁷、(2)で示したマーシャル＝オルキン法を適用することができる。具体的には、以下のアルゴリズムでクレイトン・コピュラに従う乱数を発生させることができる。

アルゴリズム (クレイトン・コピュラに従う乱数発生法)

1. 標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ に従う乱数 θ_0 を1つ発生させる。
2. θ_0 とは独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \{1 - (1/\theta_0) \ln I_i\}^{-1/\theta_0}$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

八. パラメータ推定方法

クレイトン・コピュラに従う乱数を発生させる際には、そのパラメータ α を決める必要がある。以下では、正規コピュラの場合と同様に、ヒストリカル・データから、最尤法により、このパラメータを推定する方法を説明する。

n 変量クレイトン・コピュラの密度関数は、一般に、

$$\frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} = \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1+i\alpha) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n u_i^{-\alpha-1} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right\}^{-1/\alpha-n}, \quad (48)$$

と表現可能である。データ数を N とすると、各周辺分布の経験分布関数により一様分布に変換されたデータを (u_1^j, \dots, u_n^j) ($j = 1, \dots, N$)と書くと、対数尤度関数 $l(\alpha)$ は次式で表せる。

$$l(\alpha) = N \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1+i\alpha) - \sum_{j=1}^N \left\{ (\alpha+1) \ln \left(\prod_{i=1}^n u_i^j \right) + (1/\alpha+n) \ln \left(\sum_{i=1}^n (u_i^j)^{-\alpha} - n + 1 \right) \right\}. \quad (49)$$

推定は、(49)式の α に関する偏微分係数が0となる α を求めればよい。しかし、(49)式右辺最終項の α に関する偏微分係数は α の複雑な関数になるため、ここから α を解析的に求めるのは困難である。そこで、(49)式を最大化する α を数値計算で求める²⁸。

(4) ガンベル・コピュラ

イ. ガンベル・コピュラの性質

ガンベル・コピュラは、 $\gamma (>1)$ をパラメータとして次式で表される。

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp\{-((-\ln u_1)^\gamma + \dots + (-\ln u_n)^\gamma)^{1/\gamma}\}. \quad (50)$$

27 標準ガンマ分布に従う乱数の発生方法は伏見 [1989] を参照。

28 推定に統計言語Rを用いる場合には、最適化(最大化)関数の1つであるoptimizeに対数尤度(49)式を適用することで α が得られる(なお、推定するパラメータが複数のときには、Rではoptimという関数を用いる)。

2変量 ($n=2$) のガンベル・コピュラの裾依存係数は、上側では、

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-2u+\exp\{-2(-\ln u)^\gamma\}^{1/\gamma}}{1-u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2+2^{1/\gamma}u^{2^{1/\gamma}-1}}{-1} = 2-2^{1/\gamma},\end{aligned}\quad (51)$$

となる。 $\gamma > 1$ より $\lambda_U > 0$ となるので、上側では漸近依存することがわかる。一方、下側では、 $2^{1/\gamma} > 1$ より、

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u,u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{2^{1/\gamma}}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{2^{1/\gamma}-1} = 0,\quad (52)$$

となる (漸近独立)。つまり、ガンベル・コピュラは、分布の両裾で異なる依存関係を持っている。

ロ. ガンベル・コピュラに従う乱数の発生方法

ガンベル・コピュラの生成関数は $\phi(u_i) = (-\ln u_i)^\gamma$ となるため、その逆関数は $\phi^{-1}(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$ で与えられる。マーシャル=オルキン法を適用するには、潜在変数 θ のラプラス変換 $\zeta(s)$ が以下の関係を満たせばよい。

$$\zeta(s) = \exp(-s^{1/\gamma}).\quad (53)$$

ラプラス変換が (53) 式で表されるような確率変数 θ が従う分布は、「安定指数 $1/\gamma$ ($0 < 1/\gamma \leq 1$)、歪みパラメータ 1 の正值安定分布」となることが知られている²⁹。この分布に従う乱数 θ_0 は、 $[0, \pi]$ の一様乱数 V と標準指数分布に従う乱数 W を独立に生成し³⁰、

$$\theta_0 \leftarrow \left(\frac{\sin((\gamma-1)V/\gamma)}{W} \right)^{\gamma-1} \frac{\sin(V/\gamma)}{\sin(V)^\gamma},\quad (54)$$

とすればよい (Kanter [1975])。したがって、(54) 式に従って乱数 θ_0 を発生させて、マーシャル=オルキン法を適用すれば、ガンベル・コピュラに従う乱数を発生させることができる。具体的なアルゴリズムは次のようになる。

29 一般に、安定指数 α 、歪みパラメータ β 、位置パラメータ μ 、尺度パラメータ σ を持つ安定分布は、その確率変数 X の特性関数が次のように表せる。ここで、 i は虚数単位であり、 $0 < \alpha \leq 2$ 、 $-1 < \beta \leq 1$ 、 $\sigma \geq 0$ である。詳細は Samorodnitsky and Taqqu [1994] を参照。

$$E[e^{itX}] = \begin{cases} \exp[-\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1-i\beta \operatorname{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2)\} + i\mu t] & \text{for } \alpha \neq 1, \\ \exp[-\sigma |t| \{1+(2/\pi)i\beta \operatorname{sign}(t) \ln |t|\} + i\mu t] & \text{for } \alpha = 1. \end{cases}$$

30 標準指数分布の分布関数は $F(x) = 1-e^{-x}$ で与えられるため、それに従う乱数 w は、 $[0, 1]$ の一様乱数 u として、 $w = F^{-1}(u) = -\ln(1-u)$ で生成することができる。

アルゴリズム (ガンベル・コピュラに従う乱数発生法)

1. $[0, \pi]$ の一様乱数 V と標準指数分布に従う乱数 W を独立に発生させ、潜在変数 θ_0 を (54) 式で生成する。
2. θ_0 とは独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \exp[-\{-\theta_0^{-1} \ln(I_i)\}^{1/\gamma}]$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

八. ガンベル・コピュラのパラメータ推定方法

以下では、ヒストリカル・データを用いた最尤法によって、ガンベル・コピュラのパラメータ (γ) を推定する方法を検討する。

まず、2変量の場合で考える。ガンベル・コピュラは、

$$C(u_1, u_2) = \exp(-((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma}), \quad (55)$$

と書けるので、密度関数 $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{\partial \{C(u_1, u_2)((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-1} (-\ln u_1)^{\gamma-1} / u_1\}}{\partial u_2} \\ &= \frac{(-\ln u_1)^{\gamma-1}}{u_1} \times [C(u_1, u_2) \{((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-1}\}^2 (-\ln u_2)^{\gamma-1} / u_2 \\ &\quad + C(u_1, u_2) ((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-2} (\gamma-1) (-\ln u_2)^{\gamma-1} / u_2] \\ &= C(u_1, u_2) \frac{\{(\ln u_1)(\ln u_2)\}^{\gamma-1}}{u_1 u_2} \{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma-2} \\ &\quad \times [\{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma} + \gamma - 1]. \end{aligned} \quad (56)$$

これより、対数尤度は、データ数が N の場合、 $\hat{u}_1 \equiv -\ln u_1$, $\hat{u}_2 \equiv -\ln u_2$ とすると、

$$\begin{aligned} &\ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[-((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma} + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j} ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma-2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \ln \{(\gamma-1) + ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma}\} \right], \end{aligned} \quad (57)$$

となる。(57)式を最大化する γ は、数値計算で求められる。

次に、3変量以上のガンベル・コピュラでも、同様の手続きで、密度関数と対数尤度を求められる。ただし、 n 変量の密度関数を一般的な形では表現することができないため、逐次微分して密度関数を具体的に求める必要がある。

以下では、3~5変量のガンベル・コピュラの対数尤度関数を示す。表記を簡単にするため、 $i = 1, \dots, 5$ で、 $\hat{u}_i^j \equiv -\ln u_i^j$ 、 $\psi_i^j \equiv ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma + \dots + (\hat{u}_i^j)^\gamma)^{1/\gamma}$ と書く。

・ 3変量ガンベル・コピュラ

$$\begin{aligned} & \ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[-\psi_3^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j} (\psi_3^j)^{1-3\gamma} \right\} + \ln \{ (2\gamma-1)(\gamma-1) + 3(\gamma-1) \psi_3^j + (\psi_3^j)^2 \} \right]. \quad (58) \end{aligned}$$

・ 4変量ガンベル・コピュラ

$$\begin{aligned} & \ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j \partial u_4^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[-\psi_4^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j \hat{u}_4^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j u_4^j} (\psi_4^j)^{1-4\gamma} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \ln \{ (3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1) + (11\gamma-7)(\gamma-1) \psi_4^j + 6(\gamma-1)(\psi_4^j)^2 + (\psi_4^j)^3 \} \right]. \quad (59) \end{aligned}$$

・ 5変量ガンベル・コピュラ

$$\begin{aligned} & \ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j, u_5^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j \partial u_4^j \partial u_5^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[-\psi_5^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j \hat{u}_4^j \hat{u}_5^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j u_4^j u_5^j} (\psi_5^j)^{1-5\gamma} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \ln \{ (4\gamma-1)(3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1) + 5(5\gamma-3)(2\gamma-1)(\gamma-1) \psi_5^j \right. \\ & \quad \left. + 5(7\gamma-5)(\gamma-1)(\psi_5^j)^2 + 10(\gamma-1)(\psi_5^j)^3 + (\psi_5^j)^4 \} \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

5変量までのガンベル・コピュラのパラメータは、以下のアルゴリズムによって、推定することができる（具体的なプログラム例は補論1.を参照）。

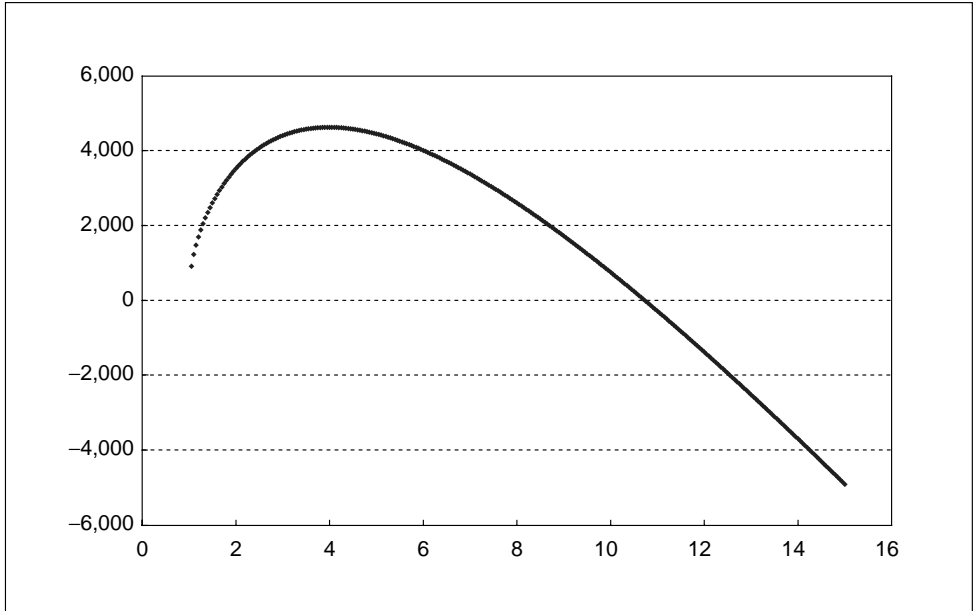
アルゴリズム（ガンベル・コピュラのパラメータ推定法）

1. まず、データ数 N 、変数数 n の原データ x_i^j ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$)を、周辺分布ごとに $[0, 1]$ の一様分布 u_i^j に変換する($u_i^j = F_i(x_i^j)$)。
2. $\hat{u}_i^j = -\ln u_i^j$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$)を計算する。
3. 対数尤度関数を定義する（変数数 n に応じて、(57)~(60)式の1つを選択）。
4. 最大化アルゴリズムにより、対数尤度関数を最大化するパラメータを求める。

ここで、上記のアルゴリズムによる具体的なパラメータの推定事例を挙げる。まず、 $\gamma = 4$ のガンベル・コピュラを用いて、5変量乱数を1,000個発生させる。次に、

ガンベル・コピュラのパラメータの値を未知として、この乱数データからパラメータを最尤推定する。推定の結果は図3のとおりである。パラメータの推定値は、 $\gamma = 3.984$ と、真値 ($\gamma = 4$) にほぼ等しい結果となった。

図3 パラメータ（横軸）と対数尤度（縦軸）



(5) フランク・コピュラ

イ. フランク・コピュラの性質

フランク・コピュラは、 $\delta (> 0)$ をパラメータとして次式で表される。

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = -\frac{1}{\delta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\delta u_i} - 1)}{(e^{-\delta} - 1)^{n-1}} \right) \quad (61)$$

このコピュラでは、

$$\frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = \frac{2e^{-\delta u}(1 - e^{-\delta u})}{(1 - e^{-\delta}) - (1 - e^{-\delta u})^2} \quad (62)$$

となることを用いれば、上側裾依存係数、下側裾依存係数は、それぞれ

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = 2 - \frac{2e^{-\delta}(1 - e^{-\delta})}{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta})} = 0 \quad (63)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = \frac{0}{1 - e^{-\delta}} = 0, \quad (64)$$

となる。つまり、フランク・コピュラでは、分布の両裾で漸近独立である。

ロ. フランク・コピュラに従う乱数の発生方法

フランク・コピュラは、生成関数が $\phi(u_i) = \ln(e^{-\delta u_i} - 1) - \ln(e^{-\delta} - 1)$ 、その逆関数が $\phi^{-1}(s) = -[\ln(1 + e^s(e^{-\delta} - 1))]/\delta$ で与えられる。マーシャル＝オルキン法を適用するには、ラプラス変換 $\zeta(s)$ が $-[\ln(1 + e^s(e^{-\delta} - 1))]/\delta$ となる潜在変数 θ の確率分布を与える必要がある。しかし、そのような確率分布は解析的な形では知られていないので、ここでは逆関数法を用いる。具体的には、以下のアルゴリズムで、フランク・コピュラに従う乱数を発生させることができる。

アルゴリズム (フランク・コピュラに従う乱数発生法)

1. 独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させ、 $U_1 = I_1$ とする。

2. $U_2 = -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{I_2(1 - e^{-\delta})}{I_2(e^{-\delta U_1} - 1) - e^{-\delta U_1}} + 1\right)$ とする。

3. U_3 は以下の式を解いたものとする。

$$\frac{\phi^{-1(2)}(\phi(U_1) + \phi(U_2) + \phi(U_3))}{\phi^{-1(2)}(\phi(U_1) + \phi(U_2))} = \frac{(e^{-\delta} - 1)(e^{-\delta U_3} - 1)[(e^{-\delta} - 1) + (e^{-\delta U_1} - 1)(e^{-\delta U_2} - 1)]^2}{[(e^{-\delta} - 1)^2 + (e^{-\delta U_1} - 1)(e^{-\delta U_2} - 1)(e^{-\delta U_3} - 1)]^2} = I_3$$

4. U_4, U_5, \dots, U_n は、(41)式に基づき、3. と同様の計算を繰り返して算出する。

このアルゴリズムの3. から容易に類推されるように、 n 変量の乱数を発生させるためには、 $n - 1$ 次方程式を解く必要がある。このため、大きな変数数のフランク・コピュラに従う乱数を発生させようとすると、重い計算負荷がかかりうることになる。

ハ. フランク・コピュラのパラメータ推定方法

多変量のフランク・コピュラのパラメータを推定するためには、対数尤度を計算して、そこから最尤推定量を求めればよい。 $w_i = e^{-\delta u_i} - 1$ と置き、5変量までのフランク・コピュラの密度関数を求めると以下ようになる³¹。

・2変量フランク・コピュラ

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{-\delta(w_1 + 1)(w_2 + 1)(e^{-\delta} - 1)}{\{(e^{-\delta} - 1) + w_1 w_2\}^2}. \quad (65)$$

31 4変量までの密度関数の式は、Cherubini, Luciano and Vecchiato [2004] にも示されている。

・ 3変量フランク・コピュラ

$$\frac{\partial^3 C(u_1, \dots, u_3)}{\partial u_1 \cdots \partial u_3} = \frac{\delta^2 (w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(e^{-\delta} - 1)^2 \{ (e^{-\delta} - 1)^2 - w_1 w_2 w_3 \}}{\{ (e^{-\delta} - 1)^2 + w_1 w_2 w_3 \}^3} . \quad (66)$$

・ 4変量フランク・コピュラ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 C(u_1, \dots, u_4)}{\partial u_1 \cdots \partial u_4} &= -\delta^3 (w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(w_4 + 1)(e^{-\delta} - 1)^3 \\ &\times \frac{(e^{-\delta} - 1)^6 - 4(e^{-\delta} - 1)^3 w_1 w_2 w_3 w_4 + w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2}{\{ (e^{-\delta} - 1)^3 + w_1 w_2 w_3 w_4 \}^4} . \end{aligned} \quad (67)$$

・ 5変量フランク・コピュラ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 C(u_1, \dots, u_5)}{\partial u_1 \cdots \partial u_5} &= \delta^4 (w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(w_4 + 1)(w_5 + 1)(e^{-\delta} - 1)^4 \times \\ &\frac{(e^{-\delta} - 1)^{12} - 11(e^{-\delta} - 1)^8 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 + 11(e^{-\delta} - 1)^8 w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2 w_5^2 - w_1^3 w_2^3 w_3^3 w_4^3 w_5^3}{\{ (e^{-\delta} - 1)^4 + w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 \}^5} . \end{aligned} \quad (68)$$

5 . コピュラの具体的な応用例（実証分析）

本節では、コピュラを用いたリスク計量の具体的な応用例として、貸出ポートフォリオの信用リスクと 株式ポートフォリオの株価変動リスクを算出する³²。

(1) 貸出ポートフォリオの信用リスク

N 社の企業への貸出債権から構成されるポートフォリオを考える。時点0（現在）と1の2時点（1期間）モデルを考える。時点1での企業 i の企業価値を X_i で表し、各企業は X_i が一定の閾値 k_i を下回ったときにデフォルトすると考える。つまり、 N 社が同時にデフォルトする確率は $\Pr(X_1 \leq k_1, \dots, X_N \leq k_N)$ で与えられる。ここで、 N 社が全て同一の格付を有しており、デフォルト確率 $\Pr(X_i \leq k_i)$ は一律0.5%であるとする。また、企業価値の相関係数 $\rho(X_i, X_j)$ も一律 ρ であるとする。Frey, McNeil and Nyfeler [2001]では、こうした設定の下で、正規コピュラとさまざまな自由度のtコピュラを想定し、デフォルト先数の分布を算出している。ここでは、Frey, McNeil and Nyfeler [2001]を参考に、正規、t（自由度10）、クレイトン、ガンベル

32 この他の応用例としては、資産担保証券等のバスケット型の信用リスク商品がある。具体的には、Li [2000]、Schönbucher and Schubert [2001]、Schmidt and Ward [2002]、Overbeck and Schmidt [2005]、小宮 [2003]等を参照。

の4種類のコピュラを想定し³³、 $N=10,000$ として、コピュラごとに、デフォルト先数の分布を算出する。具体的には、まず、1回の試行で1万変数の一様乱数 ($[0, 1]$) を発生させ、その値がデフォルト確率を下回る変数の個数をデフォルト先数であるとする。次に、これを10万回繰り返すことで、デフォルト先数の分布を得る。

各コピュラのパラメータは、ケンドールのタウ τ が一致するように定める。ここでは、相関係数 ρ が与えられているので、まず、正規、tコピュラで、 $\tau = (2/\pi) \arcsin \rho$ の関係があることを用いて、ケンドールのタウ τ を求める。なお、正規、tコピュラのパラメータは、それぞれ ρ 、 ρ と自由度(10)である。次に、ケンドールのタウ τ を所与として、クレイトン、ガンベル・コピュラのパラメータ(それぞれ α 、 γ)を、 $\alpha = 2\tau / (1 - \tau)$ 、 $\gamma = 1 / (1 - \tau)$ という関係³⁴から算出する。

以上の設定により、4種類のコピュラを用いて得られるデフォルト先数の分布を算出する³⁵。そこから、分位点とその分位点以下のデフォルト先数を表にしたものが表1(相関係数0.2)、表2(同0.038)である^{36, 37}。

表1、2より、高い信頼水準(95%~)でのデフォルト先数は、相関係数が大きいほど多いこと、特に高い信頼水準(99.9%)でのデフォルト先数は、分布の裾での依存度合いが大きいコピュラ(t、ガンベル、クレイトン)で非常に多いことがわかる。

表1 デフォルト先数の分布(相関係数0.2)

	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.9%
正規	0	0	1	2	20	126	198	435	913
t	0	0	0	0	3	112	244	812	2,070
ガンベル	5	8	11	13	21	55	97	467	5,578
クレイトン	0	0	0	0	0	63	208	1,179	3,822

表2 デフォルト先数の分布(相関係数0.038)

	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.9%
正規	4	8	14	19	43	90	109	155	227
t	0	0	0	0	9	133	240	586	1,305
ガンベル	22	27	31	33	42	56	66	156	1,176
クレイトン	0	0	2	3	26	122	179	343	643

33 フランク・コピュラは、1万変数の乱数発生が容易ではないため、ここでは対象としない。

34 補論2を参照。

35 各企業のデフォルト確率が0.5%、貸出先数が1万であるため、デフォルト先数の期待値は50となる。

36 相関係数0.038は、Frey, McNeil and Nyfeler [2001]でも用いられている値である。

37 ガンベル・コピュラについては、上側で漸近依存することから、変数の値が0.995以上である場合にデフォルトするとみなす。

(2) 株式ポートフォリオの株価変動リスク

次に、株式ポートフォリオを対象に、株価変動リスクをVaR（リスク評価期間：1日）で算出する。ここでは、同業種間では株価の相関が強いと考えられることから、電機メーカー5銘柄（日立製作所、東芝、三菱電機、日本電気、三洋電機）のポートフォリオと、総合商社5銘柄（伊藤忠商事、丸紅、三井物産、住友商事、三菱商事）のポートフォリオを対象とする。

まず、周辺分布とコピュラのパラメータを推定する。電機5銘柄では、1999年初～2001年末の、商社5銘柄では、2002年初～04年末の、それぞれ日次収益率データを用いる。

周辺分布には、確率密度関数が次式で表される両側指数分布を用いる。この分布は、分布の裾が厚いという特徴を有している。

$$f(x) = \frac{1}{2q} \exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q > 0. \quad (69)$$

この分布の平均と分散はそれぞれ p 、 $2q^2$ であるので、この関係を日次収益率データに適用してパラメータ p 、 q を推定する。

電機5銘柄、商社5銘柄の日次収益率データから p 、 q を求めたところ、表3の結果を得た。

推定された p 、 q を用いた両側指数分布と対応する経験分布の例（日本電気株の日次収益率データ）を図示したのが図4である。両側指数分布が経験分布の裾の特徴を比較的よく捉えていることがわかる。したがって、ここで、周辺分布に両側指数分布を採用することは、近似として適当であるといえる。

電機5銘柄、商社5銘柄の2つの株式ポートフォリオに対して、正規、 t 、ガンベル³⁸およびクレイトンの4つのコピュラを用いて、それらのパラメータを推定すると表4、5のとおりとなった。

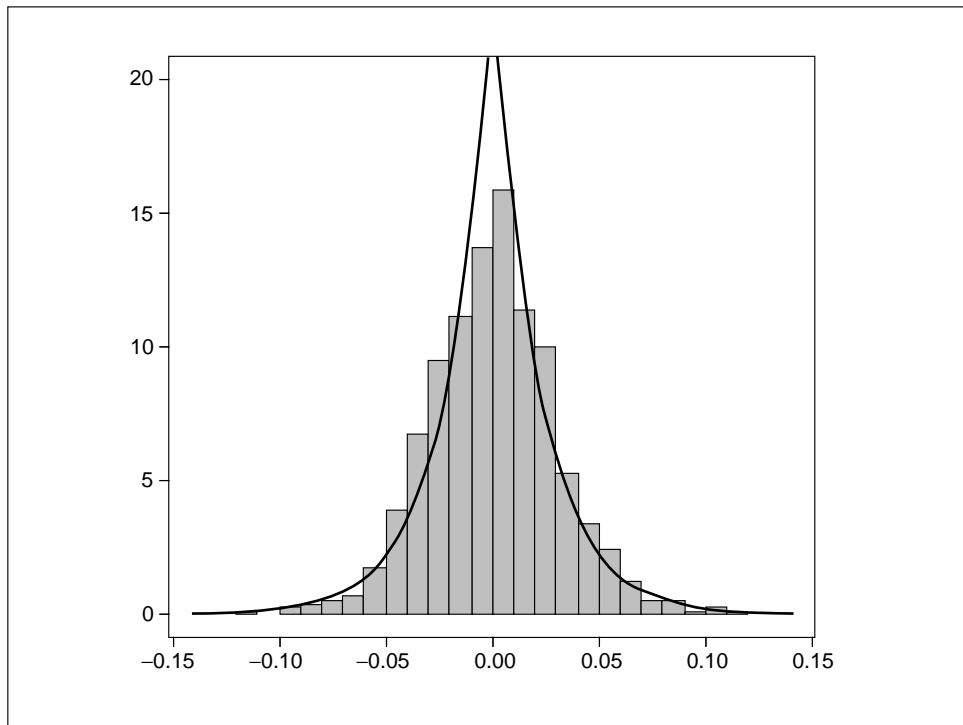
表3 両側指数分布のパラメータ

電機5銘柄	日立製作所	東芝	三菱電機	日本電気	三洋電機
p	0.000438	-0.000509	0.000522	0.000359	0.000820
q	0.018179	0.019241	0.020787	0.021139	0.020076

商社5銘柄	伊藤忠商事	丸紅	三井物産	住友商事	三菱商事
p	0.000586	0.001671	0.000470	0.000473	0.000565
q	0.019388	0.021396	0.015097	0.017520	0.014676

38 ここでは、株式ポートフォリオのリスクの算出を目的としているので、ガンベル・コピュラを用いる際には、各変量が下側で漸近依存するようデータを反転させる。

図4 経験分布と両側指数分布の例（日本電気株）



電機5銘柄、商社5銘柄の各株式ポートフォリオは、リスク評価期間の初期時点で、ポートフォリオ内の各銘柄の価値が等しいとする。表3のパラメータを持つ両側指数分布を周辺分布として、表4、5のパラメータを各種コピュラに適用して、50万回の試行で日次収益率分布を作成し、VaRと期待ショートフォール(ES)を算出した。それらの値をリスク評価期間(1日)の初期時点のポートフォリオの価値に対する比率で表示したものが、表6、7である。

表6、7からは、正規コピュラとその他のコピュラの相違に関して、以下の諸点を指摘することができる。まず、各コピュラの中では、正規コピュラが最小のリスク量を導出している。正規コピュラは、その他のコピュラに比べ、99.99%の信頼水準では2~4%ポイント程度低い値を算出している。また、正規コピュラによるリスク量とその他コピュラによるそれとの相違は、信頼水準が大きいほど大きい。特に、ESで、その傾向が顕著である。

表4 コピュラのパラメータ (電機5銘柄、1999～2001年日次収益率)

正規

Σ	1	0.539405	0.536943	0.569717	0.383190
	0.539405	1	0.597219	0.621137	0.414482
	0.536943	0.597219	1	0.553996	0.443241
	0.569717	0.621137	0.553996	1	0.393412
	0.383190	0.414482	0.443241	0.393412	1

t

自由度	6				
Σ	1	0.584118	0.571661	0.607913	0.426034
	0.584118	1	0.638485	0.667614	0.450915
	0.571661	0.638485	1	0.597704	0.477843
	0.607913	0.667614	0.597704	1	0.448515
	0.426034	0.450915	0.477843	0.448515	1

ガンベル

γ	1.380645
----------	----------

クレイトン

α	0.723174
----------	----------

表5 コピュラのパラメータ (商社5銘柄、2002～04年日次収益率)

正規

Σ	1	0.601223	0.619590	0.633444	0.600060
	0.601223	1	0.490336	0.515077	0.489257
	0.619590	0.490336	1	0.688552	0.692295
	0.633444	0.515077	0.688552	1	0.639953
	0.600060	0.489257	0.692295	0.639953	1

t

自由度	7				
Σ	1	0.633637	0.640580	0.655596	0.627849
	0.633637	1	0.510512	0.537244	0.517830
	0.640580	0.510512	1	0.711757	0.715000
	0.655596	0.537244	0.711757	1	0.666125
	0.627849	0.517830	0.715000	0.666125	1

ガンベル

γ	1.512989
----------	----------

クレイトン

α	0.839844
----------	----------

表6 電機5銘柄のポートフォリオのVaRと期待ショートフォール

コピュラ	VaR (99%)	VaR (99.5%)	VaR (99.9%)	VaR (99.99%)
	ES (99%)	ES (99.5%)	ES (99.9%)	ES (99.99%)
正規	5.43%	6.27%	8.17%	10.7%
	6.61%	7.43%	9.29%	11.7%
t	5.82%	6.86%	9.33%	13.1%
	7.34%	8.40%	10.9%	14.3%
ガンベル	6.23%	7.46%	10.4%	14.4%
	8.03%	9.27%	12.2%	16.3%
クレイトン	6.27%	7.48%	10.3%	14.4%
	8.01%	9.23%	12.1%	15.9%

表7 商社5銘柄のポートフォリオのVaRと期待ショートフォール

コピュラ	VaR (99%)	VaR (99.5%)	VaR (99.9%)	VaR (99.99%)
	ES (99%)	ES (99.5%)	ES (99.9%)	ES (99.99%)
正規	5.10%	5.91%	7.75%	10.1%
	6.25%	7.04%	8.81%	11.2%
t	5.39%	6.47%	8.58%	12.1%
	6.78%	7.74%	10.0%	13.6%
ガンベル	5.75%	6.86%	9.64%	13.1%
	7.36%	8.48%	11.1%	14.8%
クレイトン	5.75%	6.87%	9.41%	13.0%
	7.34%	8.44%	11.0%	14.6%

6 . コピュラを巡るいくつかの留意点

本節では、コピュラを用いた分析を行ううえでの留意点として、タイ・データが存在するときの周辺分布の扱い、変量間の負の依存関係の表現、tコピュラによる正規コピュラの近似精度を説明する。

(1) タイ・データが存在するときの周辺分布の扱い

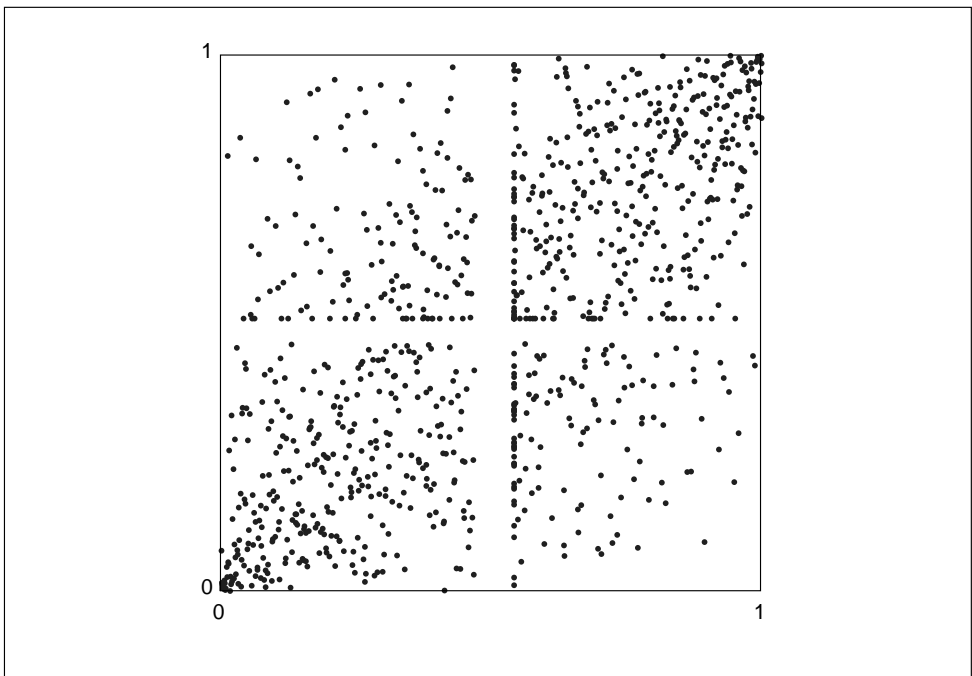
コピュラのパラメータを推定する際には、周辺分布に何らかの分布を仮定する。周辺分布として経験分布を仮定する場合には、データにタイ・データ（同一の値）が存在する可能性に留意する必要がある。

例として、トヨタ株とホンダ株の2001年1月～04年12月の日次終値対数収益率を経験分布に変換し、トヨタ株の収益率経験分布値を横軸に、ホンダ株のそれを縦軸としてプロットしたものが図5である。

図5では、株価の終値が複数日にわたり同一である場合があり、それに伴い収益率0という複数のデータが存在する。このため、図5では、トヨタ株でもホンダ株でも、図の縦横中央付近に、データが直線状に並んでいる箇所がある³⁹。したがって、これらの周辺分布は、 $[0, 1]$ の一様分布には必ずしも従っていないことになる。

$[0, 1]$ の一様分布に従わないということになると、それを前提としたコピュラのパラメータ推定が適切に行われなくなる可能性があることになる。このため、データの分布を予めチェックして、タイ・データが多いと判断するならば、周辺分布に経験分布をそのまま用いることなく、例えば、経験分布の平滑化⁴⁰を行う等の、各変量の周辺分布関数の値が $[0, 1]$ の一様分布に従うようにするための操作を加えることが考えられる。

図5 経験分布変換後の散布図（横軸：トヨタ、縦軸：ホンダ）



39 データを経験分布に変換する際には、データに大きさ順に番号を振り、その番号に従って $[0, 1]$ の区間に等間隔にデータを並べていく。このとき、タイ・データがあると、そのデータには同じ番号が振られることになるため、2変量の場合では、図5のように縦横に直線状のデータの並びがみられる。また、この場合、直線状のデータの並びに隣接して、データがない空白の部分が生じる。これは、次の背景による。例えば、100個のデータがあるとして、値の大きさ順に上から50番目となるデータが10個あるとする。仮に、この10個のデータに全て50番の番号を付すとすると、51～59の番号を持つデータはなく、10個のデータの次に値が小さいデータには60番の番号が付く。よって、空白部分が生じる。

40 分布の平滑化については、シモノフ [1999] に詳しい。

(2) 変量間の負の依存関係の表現

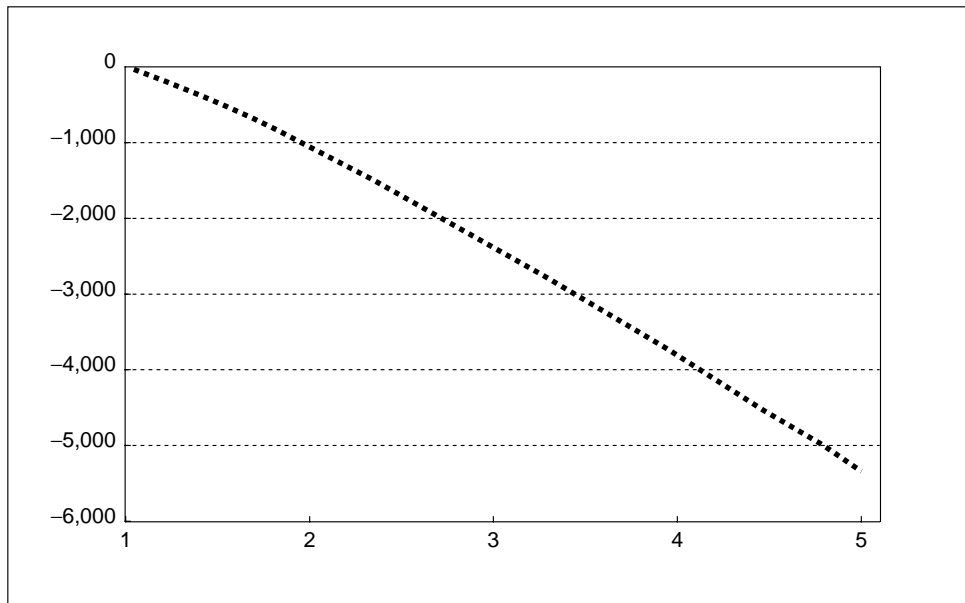
正規、tコピュラは、変量間の負の依存関係を表現可能であるが、上述の3つのアルキメディアン・コピュラのうち、ガンベル・コピュラでは、それを表現することができない⁴¹。このことを、2変量のガンベル・コピュラを例にみてみよう。負の依存関係を持つデータとして、線形相関が-0.6の2変量正規分布に従う乱数を1,000個生成した。これに、ガンベル・コピュラを適用し、周辺分布に経験分布を仮定して、(57)式の数尤度を求めた(図6)。

図6から、ガンベル・コピュラの数尤度は極大点を持たず、パラメータは最尤推定によっては得ることができないことがわかる。

また、3変量以上のデータをガンベル、フランク、クレイトン等の1パラメータのコピュラで捉えようとする場合には、すべての変量の組合せで負の依存構造を実現することは不可能である。

こうしたことから、多変量データの負の依存構造を取り扱う必要があるときは、正規、tコピュラ等の相関行列を用いるコピュラを使う方が望ましいと考えられる。

図6 負の相関のあるデータでのパラメータ(横軸)と対数尤度(縦軸)



41 2変量のフランク・コピュラでは、パラメータを $\delta < 0$ とすると、負の依存構造を表現可能である。2変量のクレイトン・コピュラでは、パラメータを $-1 < \alpha < 0$ として、非常に強い負の依存構造等の特殊なケースを表現することができる。

(3) tコピュラによる正規コピュラの近似精度

t分布は、自由度が大きくなると正規分布に収束する。同様に、tコピュラは、自由度が大きくなると正規コピュラに収束する。

しかし、コピュラの変量数が大きいほど、tコピュラと正規コピュラの相違が大きいが、Chen, Fan and Patton [2004] で示されている。ここでは、5節(1)の貸出ポートフォリオの信用リスク量の算出事例(変量数は10,000)を用いて、変量数が大きいときの、正規コピュラとtコピュラ(自由度40)との相違を考察する。相関係数に、0.1、0.3、0.6の3つを与えて、それぞれ、デフォルト先数の分布を求め、各信頼水準でのデフォルト先数を算出した(表8)。

表8から、以下の2つの傾向を指摘することができる。まず、相関係数が低いほど、正規コピュラ、tコピュラによる推定値の間の相違が大きくなる。また、信頼水準が高くなるほど、推定値の間の相違が大きくなる。

したがって、tコピュラを正規コピュラで不用意に近似することは危険であることになる。

表8 デフォルト先数の分布(正規/tは信頼水準95%以上の場合のみ)

相関 0.1	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.90%
正規	0	2	5	8	33	111	154	268	472
t	0	0	1	3	23	126	190	387	765
正規/t	-	-	-	-	-	-	0.81	0.69	0.61

相関 0.3	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.90%
正規	0	0	0	0	10	126	231	618	1,507
t	0	0	0	0	7	124	239	718	1,827
正規/t	-	-	-	-	-	-	0.96	0.86	0.82

相関 0.6	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.90%
正規	0	0	0	0	0	62	203	1,163	4,060
t	0	0	0	0	0	54	190	1,206	4,396
正規/t	-	-	-	-	-	-	1.12	0.96	0.92

7. おわりに

本稿では、金融実務で近年注目されている、周辺分布と周辺分布間の依存構造を扱う場合の1つのツールであるコピュラの活用方法を解説した。具体的には、正規、 t 、クレイトン、ガンベルおよびフランク・コピュラを対象に、各コピュラが表現する依存構造の違いを説明するとともに、各コピュラのパラメータの推定方法と各コピュラの下での乱数の発生方法を、統計言語Rを用いた実装例を織り交ぜつつ説明した。このように、コピュラは、金融実務において金融商品の価格付けやリスク評価を行う際に、非常に有効なツールの1つとなりうる。

ただし、コピュラを実際に扱うに当たっては、本稿で指摘したような、主としてコピュラに特有のさまざまな留意点がある。このほか、コピュラには、一般的なこととして予め認識しておくべき点もある。例えば、2節(6)では、コピュラを選択基準の1つの考え方を例示したが、価格付けやリスク評価の切り口に応じて、この考え方とは別の考え方を採用することもありうる。また、コピュラのパラメータをヒストリカル・データを用いて推定する場合にも、パラメータの推定値は、データの観測期間の長さや期間内のデータ分布の形状に依存することになるため、目的に応じて、適当な観測期間を定める必要がある。ここで指摘した例と同様のことは、コピュラに限らず、価格付けやリスク評価に用いられる他の前提や道具立てにもいえることである。したがって、コピュラを実際に活用しようとする場合には、コピュラについてのみならず、用いることが適当であると考えられる前提や道具立ての内容を包括的に検討する必要があると考えられる。

補論1. コピュラのパラメータの推定用プログラム例

本稿で用いた、コピュラのパラメータ推定用のプログラムは、フリーウェアの統計言語Rを用いて作成した。以下では、その具体例を掲げる⁴²。

(1) tコピュラのパラメータの推定用プログラム

(周辺分布を経験分布と仮定した場合の例)

```
#####
### tコピュラのパラメータ( $\Sigma, \nu$ )推定 ###
### xはデータを行列で与えたもの ###
#####

#まず、経験分布を用いるために、ライブラリstepfunを読み込む
library( stepfun );

dimension<- 4; #####注：データの 변수数：ここは問題に合わせて修正が必要#####
x <- t( matrix( scan( "test.dat" ), nrow=dimension ) ); #データ読み込み
N<- length( x [, 1] ); # データ数
y<- matrix( 0,nrow=N,ncol=dimension ); #分布関数の値のための設定

#####ここから経験分布用#####
for( i in 1:dimension ){
  temp0<- ecdf( x [,i] ); #経験分布関数変換用
  y[ ,i ]<- temp0( x[,i] ); #経験分布関数
}
y[ y==1 ]<- ( 1-1/2/N ); # 「1」を、分布関数の逆関数で変換するとInfになるため微調整
#####ここまで経験分布用#####

psi<- qnorm( y ); #正規分布に変換 (  $\Sigma$ の初期値用 )

temp0<- -Inf; #対数尤度最大を求めるための比較用初期値
sigmahat<- NULL; # $\Sigma$ の推定量用
nuhat<- NULL; #自由度 $\nu$ の推定量用
maxit<- 20; #自由度 $\nu$ をいくつまで計算するか
forplot<- matrix( 0, nrow=( maxit-2 ), ncol=2 ); #プロット用
epsilon<- 0.0000001; #行列収束判定の閾値
#####ここから各 $\nu$ についてForで回す#####
for( nu in 3:maxit ) { # $\nu=3 \sim$  maxitまで順に計算
  omega<- qt( y,nu ); #自由度 $\nu$ のt分布に変換
  sigma<- t( psi )%*%psi/N; # $\Sigma_0$ 、初期値
```

42 ここで示すプログラム例は、本稿の作成のために試作したものである。したがって、プログラムが効率的に作成されていない等の可能性を含んでいるため、実務等でこのプログラムを用いる場合には、予め、十分な検証および必要に応じた修正・変更を行うことが必須であることをお断りしておく。

```

sigma<- cov2cor( sigma );#対角成分を1に変換(初期値)
sigma2<- matrix( 0, nrow=dimension,ncol= dimension );

#####行列Σを求めるための反復計算#####
while( max( abs( sigma-sigma2 ) )> epsilon ){ #行列の収束判定
  sigma2<- sigma ;#反復計算のための置き換え
  invsigma<- solve( sigma );# の逆行列
  temp1<- diag( ( omega%%invsigma%%t( omega ))/nu +1; #反復式の、分母のN個の「数」
  temp2<- t( ( omega/temp1 ) )%%omega )*( nu + dimension )/N/nu;#( ( 和 ) の部分 ) * 係数=Σ
  sigma<- cov2cor( temp2 ); #Σの対角成分を1に変換
};
#####行列 Σを求めるための反復計算ここまで#####

#####対数尤度の計算#####
l<- N*( log( gamma( ( nu+dimension )/2 ) )-log( gamma( nu/2 ) ) )+ dimension*N*( log( gamma( nu/2 ) )-
log( gamma( ( nu+1 )/2 ) ) )-N/2*log( abs( det( sigma ) ) )-(
( nu+dimension )/2*( sum( log( temp1 ) ) )+( nu+1 )/2*sum( log( ( 1+( omega^2 )/nu ) ) ) );
#####
forplot[ nu-2,1 ]<- nu ;#対数尤度プロット用
forplot[ nu-2,2 ]<- 1; #対数尤度プロット用

if( temp0<=1 ){ # lが最大になるΣとνを保持する
  sigmahat<- sigma; #Σの推定量
  nuhat<- nu; #νの推定量
  temp0<- 1; #lの最大値保持
}

}; # 各νについてのFor文の終わり
print( sigmahat );# の推定量出力
print( nuhat ); #νの推定量出力
plot( forplot[ ,1 ] forplot[ ,2 ] xlab="nu", ylab="log likelihood" );#グラフ出力

```

上記のプログラムでは、本論3節(4)で示したアルゴリズムを用いて、自由度 $\nu = 3, \dots, 20$ で推定相関行列 $\hat{\Sigma}_\nu$ を収束計算し、各自由度 ν に対応する対数尤度を求めている。プログラムの最後で対数尤度が最も大きかった自由度 ν と推定相関行列 $\hat{\Sigma}_\nu$ を出力するとともに、自由度 ν と対数尤度をグラフ化することで自由度 ν の最適性を確認している。

(2) ガンベル・コピュラ (5変量) のパラメータの推定プログラム

(データの各変量は分布関数で [0, 1] の範囲に変換されていると仮定した場合)

```

#####
### 5変量ガンベル・コピュラのパラメータ (γ) 推定      ###
### xは [ 0,1 ] の一様分布に変換済のデータを行列で与えたもの  ###

```



```
#####

dimension<- 5; # データの変数数
x <- t( matrix( scan( "test.dat" ),nrow=dimension ) ); # データ読み込み
N<- length( x[ ,1 ] ); # データ数認識

# u1,u2,u3,u4,u5を与える
u1<- x[ ,1 ]; u2<- x[ ,2 ]; u3<- x[ ,3 ]; u4<- x[ ,4 ]; u5<- x[ ,5 ];

# U1--U5を与える
U1<- -log( u1 ); U2<- -log( u2 ); U3<- -log( u3 ); U4<- -log( u4 ); U5<- -log( u5 );

rm( x ) # 原データ消去

# ガンベル・コピュラの対数尤度関数の定義
gumcopula<- function( p ) {temp0<- ( U1^p+U2^p+U3^p+U4^p+U5^p );sum(
-( temp0 )^( 1/p )+log( ( U1*U2*U3*U4*U5 )^( p-1 ) ( u1*u2*u3*u4*u5 )*( temp0 )^( 1/p-5 )*( ( 4*p-1 )^( 3*p-
1 )*( 2*p-1 )^( p-1 )+ 5*( 5*p-3 )*( 2*p-1 )^( p-1 )*( ( temp0 )^( 1/p ))+ 5*( 7*p-5 )^( p-1 )*( ( temp0 )^( 2/p ))+10*( p-
-1 )*( temp0 )^( 3/p )+( temp0 )^( 4/p ) ) ) };

# 最適化 : c( a,b)は( a,b)間でγを探索。適宜この値を変える必要あり
optimize ( gumcopula,c ( 1,10 ),maximum=TRUE )

#####グラフ出力#####
maxgamma<- 10;# プロットするγの最大値
forplot<-matrix( 0,nrow=( maxgamma-1 )*20,ncol=2 );#グラフプロット用
for( n in 1:( ( maxgamma-1 ) *20 ) ) {
forplot[ n,1 ]<-1+n/20; # γの値
forplot[ n,2 ]<-gumcopula( 1+n/20 ); # 対数尤度
}
plo( forplot [ ,1 ]forplot[ ,2 ]xlab="gamma",ylab="log likelihood", type="l" ); # グラフ出力
```

上記のプログラムでは、ガンベル・コピュラのパラメータは、optimize関数で求められる。なお、補論1(1)のtコピュラの場合と同様、プログラムの最後でパラメータγと対数尤度の関係をグラフ化し、得られたパラメータの大域的な最適性を確認している。

補論2. 2変量コピュラの順位相関とパラメータの関係

いくつかの2変量コピュラでは、そのパラメータとケンドールのタウの解析的關係を導くことができる。

(1) 2変量アルキメディアン・コピュラ

2変量のアルキメディアン・コピュラは、

$$\phi(C(u_1, u_2)) = \phi(u_1) + \phi(u_2), \quad (\text{A-1})$$

と表せるので、(A-1)式の両辺を u_1 で偏微分すると、以下を得る。

$$\phi'(C(u_1, u_2)) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \phi'(u_1). \quad (\text{A-2})$$

さらに、(A-2)式の両辺を u_2 で偏微分すると、次式を得る。

$$\phi''(C(u_1, u_2)) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \phi'(C(u_1, u_2)) \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0. \quad (\text{A-3})$$

(A-3)式で、

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \phi^{-1}'(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \phi'(u_1), \quad (\text{A-4})$$

となるが、 $y \equiv \phi^{-1}(x)$ と置いて、 $\phi^{-1}'(x)$ を計算すると、

$$\phi^{-1}'(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1} = \left(\frac{d\phi(y)}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{\phi'(y)} = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}, \quad (\text{A-5})$$

となることから、

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(\phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)))} = \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(C(u_1, u_2))}, \quad (\text{A-6})$$

となる。同様に、

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(C(u_1, u_2))}, \quad (\text{A-7})$$

となる。よって、(A-3)式より、以下の関係を得る。

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = - \frac{\phi''(C(u_1, u_2)) \phi'(u_1) \phi'(u_2)}{\{\phi'(C(u_1, u_2))\}^3} . \quad (\text{A-8})$$

(A-8)式を用いて、本論(14)式で表されるケンドールのタウを計算する。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) &= \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \frac{\phi''(C(u_1, u_2)) \phi'(u_1) \phi'(u_2)}{\{\phi'(C(u_1, u_2))\}^3} du_1 du_2 , \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

となるが、 $v \equiv u_1$ 、 $w \equiv C(u_1, u_2)$ と変数変換すると、積分範囲は $0 \leq w \leq v \leq 1$ となり、ヤコビアンは、(A-6) (A-7)式等を用いて、

$$\frac{\partial(v, w)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \phi'(u_1) & \phi'(u_2) \end{vmatrix} = \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(w)} , \quad (\text{A-10})$$

となるから、以下の関係が得られる⁴³。

$$\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) = - \iint_{0 \leq w \leq v \leq 1} w \frac{\phi''(w) \phi'(v)}{\{\phi'(w)\}^2} dv dw = \int_0^1 w \frac{\phi''(w) \phi(w)}{\{\phi'(w)\}^2} dw . \quad (\text{A-11})$$

(A-11)式を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 w \frac{\phi''(w) \phi(w)}{\{\phi'(w)\}^2} dw &= \left[\frac{-w \phi(w)}{\phi'(w)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\phi(w) + w \phi'(w)}{\phi'(w)} dw \\ &= 0 + \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \int_0^1 w dw = \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \frac{1}{2} , \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

となる。したがって、(14)式よりケンドールのタウは、次式となる。

$$\tau(u_1, u_2) = 4 \left\{ \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \frac{1}{2} \right\} - 1 = 4 \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + 1 . \quad (\text{A-13})$$

代表的なアルキメディアン・コンピュータで、(A-13)式を用いて、ケンドールのタウを計算する。ガンベル・コンピュータで $\phi(w) = (-\ln w)^\gamma$ 、クレイトン・コンピュータで $\phi(w) = w^{-\alpha} - 1$ 、フランク・コンピュータで、 $\phi(w) = \ln(e^{-\delta w} - 1) - \ln(e^{-\delta} - 1)$ であることを用いる。

.....
43 (A-11)式の変形には、 $\int_w^1 \phi'(v) dv = \phi(1) - \phi(w) = -\phi(w)$ を用いた。

ガンベル・コピュラでは、

$$\int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 w \ln w dw = \frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{w^2}{2} \ln w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{w^2}{2} \frac{1}{w} dw \right\} = \frac{1}{\gamma} \left\{ 0 - \frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4\gamma}, \quad (\text{A-14})$$

となるから、(A-13)式より、ケンドールのタウは、次式となる。

$$\tau(u_1, u_2) = 1 - \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{A-15})$$

クレイトン・コピュラでは、

$$\int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw = -\int_0^1 \frac{w^{-\alpha-1}}{\alpha w^{-\alpha-1}} dw = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \int_0^1 w dw - \int_0^1 w^{\alpha+1} dw \right\} = \frac{-1}{2(\alpha+2)}, \quad (\text{A-16})$$

となるから、同様にケンドールのタウとして、次の関係を得る。

$$\tau(u_1, u_2) = \frac{-2}{\alpha+2} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha+2}. \quad (\text{A-17})$$

フランク・コピュラでは、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw &= -\int_0^1 \frac{e^{-\delta w} - 1}{\delta e^{-\delta w}} \ln \left(\frac{e^{-\delta w} - 1}{e^{-\delta} - 1} \right) dw = \frac{1}{\delta} \int_0^1 (e^{\delta w} - 1) \ln \left(\frac{e^{-\delta w} - 1}{e^{-\delta} - 1} \right) dw \\ &= \frac{1}{\delta} \left\{ -1 - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{z}{1 - e^{-z}} dz \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

という関係を得る。ここで、 $D_k(\delta) \equiv (k/\delta^k) \int_0^\delta t^k / (e^t - 1) dt$ で定義されるドバイ (Dybye) 関数を用いると、ケンドールのタウは、次式で表されることがわかる。

$$\tau(u_1, u_2) = 1 + \frac{4}{\delta} \{ D_1(\delta) - 1 \}. \quad (\text{A-19})$$

(2) 2変量正規コピュラとtコピュラ

まず、正規コピュラでは、線形相関 ρ とケンドールのタウ τ の間に、 $\tau = (2/\pi) \arcsin \rho$ という関係があることを示す。

本論(12)式に基づいてケンドールのタウ τ を計算する。 (X_1^i, X_2^i) と (X_1^j, X_2^j) はそれぞれ期待値0、分散1、(線形)相関 ρ の2変量正規分布に独立に従っていると、

$$(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \equiv (X_1^i - X_1^j, X_2^i - X_2^j), \quad (\text{A-20})$$

も正規分布に従い、期待値は0、各変量の分散は2、相関は ρ となることが確認される。ここで、 $r \cos \theta \equiv \bar{z}_1 / \sqrt{2}$ 、 $r \sin \theta \equiv (\bar{z}_2 - \rho \bar{z}_1) / \sqrt{2(1-\rho^2)}$ と置き、正規分布の対称性を利用すると、1変量標準正規分布の密度関数を $n(\cdot)$ として、

$$\begin{aligned} \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} &= \Pr\{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 > 0\} = 2 \Pr\{\bar{Z}_1 > 0, \bar{Z}_2 > 0\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty n(\bar{z}_1 / \sqrt{2}) n\left(\frac{\bar{z}_2 - \rho \bar{z}_1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-r^2 / 2) r dr \int_{-\arcsin \rho}^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho, \end{aligned} \tag{A-21}$$

となる。また、

$$\Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\} = 1 - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\}, \tag{A-22}$$

となることから、本論(12)式より、以下を得る。

$$\tau = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho \right) - 1 = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho. \tag{A-23}$$

(A-23)式の関係は、正規コピュラ、tコピュラを含む楕円コピュラと呼ばれるクラスに属するコピュラで成立し、tコピュラでも自由度に関係なく成立することが知られている (Lindskog, McNeil and Schmock [2003])。

(3) まとめ

以上から、クレイトン、ガンベル、フランク、正規、tの5種類の2変量コピュラとケンドールのタウの関係は、表A-1のようにまとめられる。

表A-1 2変量コピュラのパラメータとケンドールのタウ

コピュラ	ケンドールのタウ
クレイトン	$\alpha / (\alpha + 2)$
ガンベル	$1 - 1/\gamma$
フランク	$1 + (4/\delta) \{D_1(\delta) - 1\}$
正規	$(2/\pi) \arcsin \rho$
t	$(2/\pi) \arcsin \rho$

表A-1より、上記5つのコピュラには、ケンドールのタウの解析的な表現があること、クレイトン、ガンベル、フランク、正規の4つのコピュラでは、コピュラのパラメータとケンドールのタウが1対1に対応することがわかる。

からは、これらの2変量コピュラでは、ヒストリカル・データからケンドールのタウを求め、それと表A-1で示された式からコピュラのパラメータを推定することができることになる。

ケンドールのタウ（またはスピアマンのロー）は、周辺分布の形状を特定することなく、ヒストリカル・データから計算され⁴⁴、コピュラのパラメータを求めることができるという利点がある⁴⁵。

上記5つのコピュラでは、表A-1の関係が、2変量の場合だけでなく、多変量の場合でも、「任意の2変量のケンドールのタウ」で成立する。

44 N 個のヒストリカル・データ $(x_1^1, x_2^1), \dots, (x_1^N, x_2^N)$ が与えられたとし、タイ・データはないと仮定する。 $(x_1^i - x_2^i)(x_1^j - x_2^j) > 0 (< 0)$ となる (i, j) の組合せの数を $P(Q)$ とすると、本論(11)式のケンドールのタウの推定値 $\hat{\tau}$ は、次式で求められる。

$$\hat{\tau} = \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{2(P-Q)}{N(N+1)}$$

45 コピュラのパラメータ推定を、順位相関をデータから求めたうえで行う場合には、周辺分布を直接用いる必要はない。一方、コピュラのパラメータ推定を、最尤法を用いて行う際には、周辺分布を仮定する必要がある。

参考文献

- 小宮清孝、「CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察：CDOの商品性、国内市場の概説とともに」、『金融研究』、第22巻別冊第2号、2003年、89～130頁
- シモノフ，ジェフリーS.（竹澤邦夫・大森宏 訳）『平滑化とノンパラメトリック回帰への招待』、農林統計協会、1999年
- 伏見正則、『乱数』、東京大学出版会、1989年
- 柳川 堯、『ノンパラメトリック法』、培風館、1982年
- Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli, “Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications,” Working Paper, Crédit Lyonnais, 2000.
- Breymann, W., A. Dias, and P. Embrechts, “Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance,” *Quantitative Finance*, 3, 2003, pp. 1-14.
- Chen X., Y. Fan, and A. Patton, “Simple Tests for Models of Dependence Between Multiple Financial Time Series, with Applications to U.S. Equity Returns and Exchange Rates,” Working Paper, New York University, Vanderbilt University and London School of Economics, July, 2004.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, John Wiley and Sons, 2004.
- Deheuvels, P., “La fonction de dépendance empirique et ses propriétés – Un test ton paramétrique d’indépendance,” *Bulletin de l’Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences – 5^e Série*, 65, 1979, pp. 274-292.
- Embrechts, P., F. Lindskog, and A. McNeil, “Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management,” in *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Rachev S. T. editor, Elsevier/North-Holland, 2003.
- Frees, E. W., and E. A. Valdez, “Understanding Relationships Using Copulas,” *North American Actuarial Journal*, 2 (1), 1998, pp. 1-25.
- Frey, R., A. McNeil, and M. Nyfeler, “Copulas and Credit Models,” *Risk*, 14 (10), 2001, pp. 111-114.
- Joe, H., *Multivariate Models, and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.
- Kanter, M., “Stable Densities Under Change of Scale and Total Variation Inequalities,” *Annals of Probability*, 3 (4), 1975, pp. 697-707.
- Kruskal, W. H., “Ordinal Measures of Association,” *Journal of the American Statistical Association*, 53 (284), 1958, pp. 814-861.
- Li, D. X., “On Default Correlation: A Copula Function Approach,” *Journal of Fixed Income*, 9 (4), 2000, pp. 43-54.
- Lindskog, F., A. McNeil, and U. Schmock, “Kendall’s Tau for Elliptical Distributions,” in *Credit Risk: Measurement, Evaluation and Management*, edited by Bol, Nakhaeizadeh, Rachev, Ridder and Vollmer, Physica-Verlag Heidelberg, 2003, pp. 149-156.
- Magnus, J. R., and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley and Sons, 1988.
- Marshall, A. W., and I. Olkin, “Families of Multivariate Distributions,” *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403), 1988, pp. 834-841.

- Mashal, R., and M. Naldi, "Pricing Multiname Credit Derivatives: Heavy Tailed Hybrid Approach," Working Paper, Columbia Business School, 2002.
- Mina, J., and J. Y. Xiao, *Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard*, RiskMetrics, 2001, pp. 95-102.
- Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, 1998.
- Overbeck, L., and W. Schmidt, "Modelling Default Dependence with Threshold Models," *Journal of Derivatives*, 12 (4), 2005, pp. 10-19.
- Romano, C., "Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market," Working paper, Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati, 12, 2002.
- Samorodnitsky, G., and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, 1994.
- Schmidt, W., and I. Ward, "Pricing Default Baskets," *Risk*, 15 (1), 2002, pp. 111-114.
- Schönbucher, P. J., and D. Schubert, "Copula-Dependent Default Risk Intensity Models," Technical Report, Bonn University, 2001.
- Schweizer, B., and E. F. Wolff, "On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables," *The Annals of Statistics*, 9 (4), 1981, pp. 879-885.